

З. А. ЧАНТУРИЯ

МОДУЛЬ ИЗМЕНЕНИЯ ФУНКЦИИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ В ТЕОРИИ РЯДОВ ФУРЬЕ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 21 V 1973)

1. Понятие вариации функции было впервые введено К. Жорданом. Н. Винер обобщил понятие вариации и ввел функции ограниченной p -вариации. Наконец, Л. Юнг (*) ввела понятие функции ограниченной Φ -вариации.

Пусть $\Phi(u)$ — строго возрастающая непрерывная функция при $u \geq 0$, $\Phi(0) = 0$.

Говорят, что периодическая с периодом 2π функция имеет ограниченную Φ -вариацию или $\in V_\Phi$, если

$$V_\Phi(f) = \sup_{-\infty < a < \infty} \sup_{\Pi_a} \sum_{k=1}^m \Phi(|f(x_k) - f(x_{k-1})|) < \infty,$$

где $\Pi_a = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = a + 2\pi\}$ — произвольное разбиение периода. При $\Phi(u) = u$ получается класс V Жордана, при $\Phi(u) = u^p$, $1 < p < \infty$, — классы Винера (3). Отметим, что функции класса V_Φ могут иметь лишь разрывы первого рода (4) и справедливы строгие вложения

$$\text{Lip } \frac{1}{p} \subset V_p \subset V_q, \quad p < q.$$

Введем теперь понятие модуля изменения функции. Всюду в дальнейшем предполагается, что все рассматриваемые функции удовлетворяют следующим требованиям:

- 1) $f(t)$ периодична с периодом 2π и ограничена всюду на периоде;
- 2) в любой точке t разрыва первого рода

$$\min \{f(t-0), f(t+0)\} \leq f(t) \leq \max \{f(t-0), f(t+0)\};$$

- 3) функция $f(t)$ достигает своей верхней или нижней грани на периоде.

Определение. Модулем изменения функции $f(t)$ называется функция натурального аргумента $v(n, f)$, определенная следующим образом:

$$v(n, f) = \sup_{\Pi} \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{2k+1}) - f(x_{2k})|, \quad (1)$$

где Π — произвольное разбиение интервала $(0, 2\pi)$ на n непересекающихся интервалов (x_{2k}, x_{2k+1}) , $k = 0, 1, \dots, n-1$, т. е.

$$0 < x_0 < x_1 \leq x_2 < x_3 \leq \dots \leq x_{2n-2} < x_{2n-1} < 2\pi.$$

Очевидны следующие свойства модуля изменения функции:

- 1) $v(n, f) \leq v(n+1, f)$,
- 2) $v(n, f) \leq v(m, f) + v(n-m, f)$, $0 \leq m \leq n$.

Мы теперь укажем необходимое и достаточное условие того, чтобы данная функция натурального аргумента была модулем изменения.

Теорема 1. Для того чтобы функция натурального аргумента была модулем изменения некоторой функции $f(t)$, необходимо и достаточно, чтобы она была неубывающей и выпуклой вверх функцией.

Впредь такие функции будем называть модулями изменения. Пусть дан модуль изменения $v(n)$.

Класс функций, для каждой из которых $v(n, f) = O(v(n))$, будем обозначать через $V[v(n)] = V[v]$.

Имеет место

Теорема 2. Для того чтобы $V[v_1] = V[v_2]$, необходимо и достаточно, чтобы $v_1(n) \sim v_2(n)$ *. Если $v_1(n) = o(v_2(n))$, то справедливо строгое включение

$$V[v_1] \subset V[v_2].$$

Теорема 3. Если $\Phi(u)$ выпукла и $\Phi(u) \neq u$, то справедливо строгое включение

$$V_\Phi \subset V[n\Phi^{-1}(1/n)].$$

Следствие 1. Класс Жордана $V = V[1]$.

Следствие 2. Класс Винера $V_p \subset V[n^{1-1/p}]$, $1 < p < \infty$.

Для оценки модуля изменения непрерывной функции полезна следующая

Теорема 4. Если $f(t)$ непрерывна на $[0, 2\pi]$ с модулем непрерывности $\omega(\delta)$, то

$$v(n, f) = O(n\omega(1/n)).$$

В терминах модуля изменения возможно указать критерий того, чтобы функция имела только разрывы первого рода.

Теорема 5. Для того чтобы $f(t)$ имела только разрывы первого рода, необходимо и достаточно, чтобы

$$v(n, f) = o(n).$$

Из этой теоремы следуют теорема Жордана, теорема Винера ⁽³⁾ и теорема Л. Юнга ⁽⁴⁾ о том, что функции соответственно классов V , V_p и V_Φ имеют только разрывы первого рода.

2. Хорошо известно, что если модуль непрерывности функции удовлетворяет условию Дини — Липшица, то ряд Фурье функции сходится равномерно ⁽¹⁾, стр. 280).

С другой стороны, классический результат Жордана гласит: если $f(t)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию, то ряд Фурье сходится равномерно. Затем Л. Юнг ⁽⁵⁾ обобщила эту теорему Жордана на классы Винера и более широкие классы $V_{\exp(-u^{-\alpha})}$, $0 < \alpha < 1/2$; этот результат обобщил Салем ⁽⁶⁾ следующим образом. Пусть $\Phi(u)$ и $\Psi(u)$ — выпуклые на $[0, \infty)$ взаимно дополнительные в смысле У. Юнга функции ⁽¹⁾, стр. 32). Результат Салема состоит в том, что ряд Фурье сходится равномерно на всей оси, если $f \in C \cap V_\Phi$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Psi(1/n) < \infty. \quad (2)$$

К. И. Осолков ⁽⁷⁾ показал, что (2) эквивалентно условию

$$\int_{+0} \ln \frac{1}{\Phi(u)} du < \infty.$$

А. Баерштейн ⁽⁸⁾ и независимо К. И. Осолков ⁽⁷⁾ показали, что условие (2) является необходимым для равномерной сходимости всех рядов Фурье класса $C \cap V_\Phi$ в совокупности (см. также ⁽⁹⁾).

* Т. е. существуют две положительные константы A и B такие, что $Av_1(n) \leq v_2(n) \leq Bv_1(n)$.

Теперь мы в терминах модуля изменения функции сформулируем теорему, из которой следуют все предыдущие результаты, а также некоторые новые.

Теорема 6. Пусть $\omega(\delta, f)$ — модуль непрерывности и $v(n, f)$ — модуль изменения функции $f(t)$. Если существует функция $\varphi(n) \rightarrow 0$ такая, что

$$\sum_{k=\lfloor \exp(\varphi(n)\omega^{-1}(1/n)) \rfloor}^n \frac{v(k, f)}{k^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

то ряд Фурье функции $f(t)$ сходится равномерно.

Следствие 1. Если $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v(k, f)}{k^2} < \infty$ и $f(t)$ непрерывна, то ряд Фурье сходится равномерно.

Из этого получается, если $f \in C \cap V_{\Phi}$, где $\Phi(u)$ выпукла, и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) < \infty, \quad (3)$$

то ряд Фурье сходится равномерно.

Можно показать, что сходимость (3) эквивалентна сходимости ряда (2).

Следствие 2. Если $v(k, f) = O(k(\ln k)^{-1}(\ln \ln k)^{-\alpha})$, $0 < \alpha \leq 1$, и $\omega(\delta, f) = O\left(\frac{1}{\ln(1/\delta)}\right) \cdot \exp(o(\ln \ln(1/\delta))^{\alpha})$, то ряд Фурье функции $f(t)$

сходится равномерно.

Следствие 3. Если $v(k, f) = O(k(\ln k)^{-1}(\ln \ln k)^{-1}(\ln \ln \ln k)^{-\alpha})$, $0 < \alpha \leq 1$, и $\omega(\delta, f) = (\ln(1/\delta))^{-\exp(o((\ln \ln \ln(1/\delta))^{\alpha}))}$, то ряд Фурье функции $f(t)$ сходится равномерно.

3. В этом параграфе речь идет об абсолютной сходимости ряда Фурье. Известные теоремы С. Н. Бернштейна и А. Зигмунда гласят ((¹), стр. 608—649).

Теорема Бернштейна. Если модуль непрерывности функции $f(t)$ удовлетворяет условию $\sum_{n=1}^{\infty} \omega(1/n)/n^h < \infty$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)| + |b_n(f)| < \infty, \quad (4)$$

где $a_n(f)$ и $b_n(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f(t)$.

Теорема Зигмунда. Если $f(t) \in V$ и модуль непрерывности $\omega(\delta, f)$ удовлетворяет условию

$$\sum \frac{(\omega(1/n, f))^{1/2}}{n} < \infty,$$

то ряд (4) сходится.

Сформулируем теперь теорему, из которой теоремы Бернштейна и Зигмунда получаются как предельные случаи.

Пусть $v(n, f)$ — модуль изменения, а $\omega(\delta, f)$ — модуль непрерывности функции $f(t)$; далее обозначим $\varphi(m) = \sup\{n; v(n, f)/n \geq 1/m\}$ и пусть

$$\tau(n) = \log_2 \frac{n\omega(1/n, f)}{v(n, f)}$$

Теорема 7. Пусть модуль изменения функции $f(t)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(n, f)}{n^{1/2}} < \infty;$$

тогда если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \left\{ \sum_{m=0}^{\tau(n)} \frac{1}{4^m} \Phi\left(\left[\frac{2^m}{\omega(1/n)}\right]\right) \right\}^{1/2} < \infty,$$

то ряд (4) сходится.

Если же последовательность $v(n)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(n)}{n^{3/2}} = \infty,$$

то существует функция $f(t)$ такая, что $v(n, f) = O(vn)$ и $\omega(1/n, f) = O(v(n)/n)$, а ряд (4) расходится.

Следствие 1. Если $v(n, f) = O(1)$, то получается теорема Зигмунда.

Следствие 2. Если применить теорему 4, то получается теорема Бернштейна.

Следствие 3. Если $v(n, f) = O(n^\alpha)$, $0 < \alpha < 1/2$, и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\omega\left(\frac{1}{n}\right) \right]^{1/2(1-2\alpha)/(1-\alpha)} < \infty,$$

то ряд (4) сходится.

Например, можно взять $\omega(\delta) = \delta^{1/2} \cdot 2^{(lg_2(1/\delta))^2 - \varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

Следствие 4. Если $v(n, f) = O(n^{1/2} \ln^{-\beta} n)$, $\beta > 3/2$, и

$$\sum \frac{1}{n} \ln^{1-\beta} \left(\frac{1}{\omega(1/n)} \right) < \infty,$$

то ряд (4) сходится.

Например, можно взять $\omega(\delta) = O(\exp(-(\ln(1/\delta))^{2/(2\beta-1)+\varepsilon}))$, $\varepsilon > 0$, или $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, где $\alpha > 0$.

Следствие 5. Если $v(n, f) = O(n^{1/2} \ln^{-\beta} n)$, $1 < \beta \leq 3/2$, и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n+2 \lg_2 \omega(1/2^n)]^{1/2}}{n^\beta} < \infty,$$

Например, можно взять $\omega(\delta) = \delta^{1/2} \cdot 2^{(lg_2(1/\delta))^{2\beta-2-\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$.

то ряд (4) сходится.

Институт прикладной математики
Тбилисского государственного университета

Поступило
25 IV 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. К. Барн, Тригонометрические ряды, М., 1961. ² А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1, М., 1965. ³ N. Wiener, Massach. J. Math., 3, 72 (1924). ⁴ L. Young, Acta Math., 67 (1936). ⁵ L. Young, Math. Ann., 155, 4 (1938). ⁶ R. Salem, Actual Sci. Industr., 862, 46 (1940). ⁷ К. И. Осколкин, Матем. заметки, 12, 3 (1972). ⁸ A. Baernstein, II, Studia Math., 42, 3 (1972). ⁹ Б. И. Голубов, Матем. сборн., 89, 4 (1972).