

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

В. Н. ГОЛЬДБЕРГ

О РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ ПОЧТИ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ
НА ПЛОСКОСТИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 16 V 1973)

1°. В области $\bar{G}_T^* = \{0 \leq x \leq 1 - v_1 t, 0 \leq t \leq T < v_1^{-1}\}$ рассмотрим задачу

$$p_t + \lambda p_x = P(x, t, p, q), \quad (1)$$

$$q_t - v q_x = Q(x, t, p, q), \quad (2)$$

$$p(x, 0) = p_0(x), \quad q(x, 0) = q_0(x), \quad (3)$$

$$\mu [B_1 p_x + B_2 p_t + B_3 q_t + B_4 q_x] \big|_{x=0} + A(t, p, q) \big|_{x=0} = 0, \quad (4)$$

где p, P, A и q, Q соответственно n - и m -мерные векторы, $n > 1$ (случай $n=1$ см. в (1)), λ, v — постоянные диагональные положительные матрицы*, v_1 — наибольшее собственное значение матрицы v , B_i — постоянные матрицы соответствующих размеров, удовлетворяющие условию $|B_2 - B_1 \lambda^{-1}| \neq 0$, $\mu \geq 0$ — малый числовой параметр. Предполагается, что $p_0 \in C_1[0, 1]$, $q_0, P, Q \in C_2(\bar{G}_T^* \times R^{n+m})$, вектор-функция A аналитическая в области $[0, T] \times R^{n+m}$, $|A_p(0, p_0(0), q_0(0))| \neq 0$ и выполняются условия согласования, необходимые для существования в $\bar{G}_T^*$ решения задачи (1) — (4) при $\mu=0$ класса $C_1(\bar{G}_T^*)$. В (1) — (4) все величины вещественные. Условимся называть (1) — (4) задачей $\mu \geq 0$.

В настоящей заметке вводится определение разрывного решения (р.р.) задачи $\mu=0$, возникающего при соответствующих условиях из C_1 -решения задачи $\mu=0$ при продолжении C_1 -решения по t , устанавливаются теоремы существования и единственности р.р., а также теоремы об однозначной разрешимости и сходимости при $\mu \rightarrow 0$ гладкого решения задачи $\mu > 0$ к р.р. Отметим, что описанные результаты можно интерпретировать как некоторый аналог известных результатов А. Н. Тихонова, Л. С. Понтрягина и Е. Ф. Мищенко (см., например, (2-5)) по системам обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных.

Проведенное рассмотрение задач $\mu \geq 0$ представляет интерес для некоторых прикладных задач математической физики (см., например, (6-8)), где исследовались колебания тока и напряжения в ограниченной телеграфной линии с нелинейным граничным условием вида (4).

2°. Введем обозначения. Пусть

$$\lambda = \text{diag}[\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{k_1 \text{ раз}}; \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{k_2 \text{ раз}}; \dots; \underbrace{\lambda_r, \dots, \lambda_r}_{k_r \text{ раз}}],$$

$$n = \sum_{s=1}^r k_s, \quad \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_r > 0.$$

* Случай, когда матрица $\text{diag}[\lambda, v]$ имеет собственные значения, равные нулю, исключается из рассмотрения ради простоты формулировок.

По произвольному вектору $p = \{p^1, p^2, \dots, p^n\} \in R^n$ для $1 \leq i \leq r$ определим векторы $p_i = \{p^{e_i+1}, p^{e_i+2}, \dots, p^{e_i+k_i}\} \in R^{k_i}$ и величины $|p_i| = \sum_{\alpha=1}^{k_i} |p^{e_i+\alpha}|$, где $e_1 = 0, e_i = \sum_{s=1}^{i-1} k_s$. Тогда вектор-функцию $P(x, t, p, q)$ можно записать в виде

$$P(x, t, p, q) = \{P_1(x, t, p_1, p_{j \neq 1}, q), P_2(x, t, p_2, p_{j \neq 2}, q), \dots, P_r(x, t, p_r, p_{j \neq r}, q)\}.$$

Для $0 \leq \tau < T \leq \bar{T}$, $1 \leq k \leq r$ положим

$$\begin{aligned} \bar{G}_T &= \{(x, t) \in \bar{G}_T^0, t \leq T\}, \quad G_T = \{(x, t) \in \bar{G}_T, t < T\}, \\ \bar{G}_T[k_\tau] &= \{(x, t) \in \bar{G}_T, \tau \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \min[\lambda_k(t-\tau), 1-v_1 t]\}, \\ \bar{D}_T[k_\tau] &= \bar{G}_T \setminus \bar{G}_T[k_\tau], \quad \bar{D}_T(k_\tau) = \{(x, t) \in \bar{D}_T[k_\tau], x \neq \lambda_k(t-\tau)\}. \end{aligned}$$

3°. Рассмотрим задачу $\mu=0$. Имеет место (°, 10)

Теорема 1. Справедлива следующая альтернатива: либо

А) в $\bar{G}_T^*$ существует единственное решение $\{\bar{p}, \bar{q}\} \in C_1(\bar{G}_T^*)$ задачи $\mu=0$ и $|A_p(t, \bar{p}(0, t), \bar{q}(0, t))| \neq 0$ при $0 \leq t \leq \bar{T}$; либо

Б) найдется такое $0 < T^* \leq \bar{T}$, что в G_{T^*} существует единственное решение $\{p, q\} \in G_1(G_{T^*})$ задачи $\mu=0$, $|A_p(t, p(0, t), q(0, t))| \neq 0$ при $0 \leq t < T^*$ и выполняется по крайней мере одно из следующих равенств:

$$s = \sum_{i=1}^n \sup_{G_{T^*}} |\dot{p}^i| + \sum_{j=1}^m \sup_{G_{T^*}} |\dot{q}^j| = \infty, \quad d = \inf_{0 \leq t < T^*} |A_p(t, \dot{p}(0, t), \dot{q}(0, t))| = 0.$$

Соответствующие примеры показывают, что реализуются все логические возможности, содержащиеся в утверждении Б).

Утверждение А) и равенство $s = \infty$ в утверждении Б) теоремы 1 означают, что классическое решение задачи $\mu=0$ продолжено по t до границ области определения вектор-функций P, Q, A . Теорема 1 оставляет открытым вопрос о продолжаемости решения задачи $\mu=0$, если имеет место утверждение Б), но $T^* < \bar{T}$, $s < \infty$ и, следовательно, $d=0$. В то же время примеры, иллюстрирующие эту ситуацию, показывают, что если

$$J = \int_0^{T^*} |\det A_p(\tau, \dot{p}(0, \tau), \dot{q}(0, \tau))|^{-1} d\tau < \infty,$$

то в $\bar{G}_T$ при $T > T^*$ и сколь угодно близком к T^* , вообще говоря, не существует даже непрерывных обобщенных решений задачи $\mu=0$ *.

Ниже в предположении, что имеет место утверждение Б) теоремы $T^* < \bar{T}$, $s < \infty$, $J < \infty$, проводится построение р.р. задачи $\mu=0$ в $\bar{G}_T$ при $T > T^*$. Отметим, что в изучаемом случае справедлива

Лемма 1. Вектор-функции $p \in C(\bar{G}_{T^*})$, $q \in C_1(\bar{G}_{T^*})$ и $|A_p(T^*, p^*, q^*)| = 0$ где $p^* = \dot{p}(0, T^*)$, $q^* = \dot{q}(0, T^*)$.

Положим $H(t, p, q) = -(B_2 - B_1 \lambda^{-1})^{-1} A(t, p, q)$. В силу леммы 1 $p =$ есть состояние равновесия системы

$$dp/d\tau = H(T^*, p(\tau), q^*) \quad (1)$$

и матрица $H_p(T^*, p^*, q^*)$ имеет собственное значение, равное нулю. След (3), предположим, что кратность этого собственного значения равна ед

* Напротив, если $J = \infty$, то при $t > T^*$ решение $\{\bar{p}, \bar{q}\}$, вообще говоря, продолжаете: неоднозначно в классе непрерывных обобщенных решений задачи $\mu=0$ (°).

По произвольному вектору $p = \{p^1, p^2, \dots, p^n\} \in R^n$ для $1 \leq i \leq r$ определим векторы $p_i = \{p^{e_i+1}, p^{e_i+2}, \dots, p^{e_i+k_i}\} \in R^{k_i}$ и величины $|p_i| = \sum_{\alpha=1}^{k_i} |p^{e_i+\alpha}|$, где $e_1 = 0$, $e_i = \sum_{s=1}^{i-1} k_s$. Тогда вектор-функцию $P(x, t, p, q)$ можно записать в виде

$$P(x, t, p, q) = \{P_1(x, t, p_1, p_{j \neq 1}, q), P_2(x, t, p_2, p_{j \neq 2}, q), \dots, P_r(x, t, p_r, p_{j \neq r}, q)\}.$$

Для $0 \leq \tau < T \leq \bar{T}$, $1 \leq k \leq r$ положим

$$\begin{aligned} \bar{G}_T &= \{(x, t) \in \bar{G}_T^0, t \leq T\}, \quad G_T = \{(x, t) \in \bar{G}_T, t < T\}, \\ \bar{G}_T[k_\tau] &= \{(x, t) \in \bar{G}_T, \tau \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \min[\lambda_k(t-\tau), 1-v_1 t]\}, \\ \bar{D}_T[k_\tau] &= \bar{G}_T \setminus G_T[k_\tau], \quad \bar{D}_T(k_\tau) = \{(x, t) \in \bar{D}_T[k_\tau], x \neq \lambda_k(t-\tau)\}. \end{aligned}$$

3°. Рассмотрим задачу $\mu=0$. Имеет место (9, 10)

Теорема 1. Справедлива следующая альтернатива: либо

А) в $\bar{G}_T^0$ существует единственное решение $\{\bar{p}, \bar{q}\} \in C_1(\bar{G}_T^0)$ задачи $\mu=0$ и $|A_p(t, \bar{p}(0, t), \bar{q}(0, t))| \neq 0$ при $0 \leq t \leq \bar{T}$; либо

Б) найдется такое $0 < T^* \leq \bar{T}$, что в G_{T^*} существует единственное решение $\{p, q\} \in G_1(G_{T^*})$ задачи $\mu=0$, $|A_p(t, p(0, t), q(0, t))| \neq 0$ при $0 \leq t < T^*$, и выполняется по крайней мере одно из следующих равенств:

$$s = \sum_{i=1}^n \sup_{G_{T^*}} |\dot{p}^i| + \sum_{j=1}^m \sup_{G_{T^*}} |\dot{q}^j| = \infty, \quad d = \inf_{0 \leq t < T^*} |A_p(t, \dot{p}(0, t), \dot{q}(0, t))| = 0.$$

Соответствующие примеры показывают, что реализуются все логические возможности, содержащиеся в утверждении Б).

Утверждение А) и равенство $s = \infty$ в утверждении Б) теоремы 1 означают, что классическое решение задачи $\mu=0$ продолжено по t до границы области определения вектор-функций P, Q, A . Теорема 1 оставляет открытым вопрос о продолжаемости решения задачи $\mu=0$, если имеет место утверждение Б), но $T^* < \bar{T}$, $s < \infty$ и, следовательно, $d = 0$. В то же время примеры, иллюстрирующие эту ситуацию, показывают, что если

$$J = \int_0^{T^*} |\det A_p(\tau, \dot{p}(0, \tau), \dot{q}(0, \tau))|^{-1} d\tau < \infty,$$

то в $\bar{G}_T$ при $T > T^*$ и сколь угодно близком к T^* , вообще говоря, не существует даже непрерывных обобщенных решений задачи $\mu=0$ *.

Ниже в предположении, что имеет место утверждение Б) теоремы 1, $T^* < \bar{T}$, $s < \infty$, $J < \infty$, проводится построение р.р. задачи $\mu=0$ в $\bar{G}_T$ при $T > T^*$. Отметим, что в изучаемом случае справедлива

Лемма 1. Вектор-функции $p \in C(\bar{G}_{T^*})$, $q \in C_1(\bar{G}_{T^*})$ и $|A_p(T^*, p^*, q^*)| = 0$, где $p^* = \dot{p}(0, T^*)$, $q^* = \dot{q}(0, T^*)$.

Положим $H(t, p, q) = -(B_2 - B_1 \lambda^{-1})^{-1} A(t, p, q)$. В силу леммы 1 $p = p^*$ есть состояние равновесия системы

$$dp/d\tau = H(T^*, p(\tau), q^*) \quad (5)$$

и матрица $H_p(T^*, p^*, q^*)$ имеет собственное значение, равное нулю. Следуя (3), предположим, что кратность этого собственного значения равна еди-

* Напротив, если $J = \infty$, то при $t > T^*$ решение $\{\bar{p}, \bar{q}\}$, вообще говоря, продолжаемо неоднозначно в классе непрерывных обобщенных решений задачи $\mu=0$ (9).

нице, а действительные части всех остальных собственных значений матрицы $H_p(T^*, p^*, q^*)$ отрицательны. Тогда существует такая матрица L , $|L| \neq 0$, что преобразование $p - p^* = L\xi$ приводит систему (5) к виду

$$\frac{d\xi^1}{d\tau} = \alpha(\xi^1)^2 + \Phi^1(\xi), \quad \frac{d\xi^i}{d\tau} = \sum_{s=2}^n a_{s,i} \xi^s + \Phi^i(\xi), \quad 2 \leq i \leq n, \quad (6)$$

где α — постоянная, функции Φ^s таковы, что $\Phi^s(0) = \partial\Phi^s(0)/\partial\xi^k = 0$, $1 \leq s, k \leq n$, $\partial^2\Phi^1(0)/\partial(\xi^1)^2 = 0$, а действительные части всех собственных значений матрицы $\|a_{s,i}\|$ отрицательны⁽³⁾. Пусть $\alpha \neq 0$. Тогда существует единственная траектория $p = \hat{p}(\tau)$ системы (5), стремящаяся при $\tau \rightarrow -\infty$ к состоянию равновесия $p = p^*$ ^(3, 11). Предположим далее, что траектория $p = \hat{p}(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$ стремится к асимптотически устойчивому состоянию равновесия $p = \bar{p}$, $\sum_{i=1}^n |\bar{p}^i| < \infty$, системы (5).

Обозначим через $\mathfrak{R}_T$, $T^* < T \leq \bar{T}$, множество определенных в $\bar{G}_T$ вектор-функций $\{p, q\}$ таких, что $\{p, q\} = \{\bar{p}, \bar{q}\}$ в $\bar{G}_{T^*}$, $p(0, T^*+0) = \bar{p}$, $q \in C_1(\bar{G}_T)$, $p_i \in C_1(\bar{G}_T[i_{T^*}])$, $p_i \in C(\bar{D}_T[i_{T^*}])$, $p_i \in C_1(\bar{D}_T(i_{T^*}))$, $1 \leq i \leq r$.

Отметим, что вектор-функция p_i может быть двухзначной на характеристике $x = \lambda_i(t - T^*)$.

Определение 1. Вектор-функция $\{p, q\} \in \mathfrak{R}_T$, $T^* < T \leq \bar{T}$, называется р.р. решением задачи $\mu = 0$ в $\bar{G}_T$, если

1) $H(t, \overset{1}{p}(0, t), \overset{1}{q}(0, t)) = 0$ при $T^* \leq t \leq T$ и действительные части всех собственных значений матрицы $H_p(t, \overset{1}{p}(0, t), \overset{1}{q}(0, t))$ отрицательны;

2) при любых $(x, t) \in \bar{G}_T$, $x \neq \lambda_i(t - T^*)$, $1 \leq i \leq r$, вектор-функция $\{\overset{1}{p}, \overset{1}{q}\}$ удовлетворяет уравнениям (1), (2).

Теорема 2. Имеет место следующая альтернатива: либо

А) в $\bar{G}_T^*$ существует единственное р.р. задачи $\mu = 0$; либо

Б) найдется такое $T^* < \theta^* \leq \bar{T}$, что при любом $\varepsilon > 0$ в $\bar{G}_{\theta^*-\varepsilon}$ существует единственное р.р. $\{\overset{1}{p}, \overset{1}{q}\}$ задачи $\mu = 0$ и имеет место по крайней мере одно из следующих соотношений:

$$\sum_{i=1}^r \left[\max_{\bar{G}_{\theta^*-\varepsilon}[i_{T^*}]} |\overset{1}{p}_i| + \max_{\bar{D}_{\theta^*-\varepsilon}[i_{T^*}]} |\overset{1}{p}_i| \right] + \sum_{j=1}^m \max_{\bar{G}_{\theta^*-\varepsilon}} |\overset{1}{q}_j| \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\inf_{T^* \leq t < \theta^*} |\det H_p(t, \overset{1}{p}(0, t), \overset{1}{q}(0, t))| = 0.$$

4°. Перейдем к исследованию задачи $\mu > 0$.

Определение 2. Вектор-функция $\{p, q\} \in C(\bar{G}_T)$, $0 < T \leq \bar{T}$, $p_i \in C_1(\bar{G}_T[i_0])$, $p_i \in C_1(\bar{D}_T[i_0])$, $1 \leq i \leq r$, $q \in C_1(\bar{G}_T)$, удовлетворяющая (1)–(4) в $\bar{G}_T$, называется решением задачи $\mu > 0$ в $\bar{G}_T^*$.

При изучении задачи $\mu > 0$ используется

Условие (*). Каковы бы ни были $1 \leq i \leq r$ и $-\infty < \tau < \infty$ при $T^* \leq t \leq \bar{T}$, существует решение $p_i = p_i(t) \in C[T^*, \bar{T}]$ уравнения

$$p_i(t) = \hat{p}_i(\tau) + \int_{T^*}^t P_i(\xi, \eta, p_i(\eta), \overset{1}{p}_{j \neq i}(\xi, \eta), \overset{1}{q}(\xi, \eta))|_{\xi = \lambda_i(\eta - T^*)} d\eta. \quad (7)$$

* Определение 2 вводится в связи с тем, что при $\mu > 0$, вообще говоря, не выполняется условие согласования, необходимое для существования в $\bar{G}_T^*$ решения задачи $\mu > 0$ класса $C_1(\bar{G}_T^*)$.

Теорема 3. Пусть:

- 1) при $0 \leq t < C^*$ действительные части всех собственных значений матрицы $H_p(t, \overset{\circ}{p}(0, t), \overset{\circ}{q}(0, t))$ отрицательны;
- 2) имеет место утверждение А) теоремы 2;
- 3) выполняется условие (*).

Тогда найдется такое $0 < \mu_0 < \infty$, что:

- 1) при любом $0 < \mu < \mu_0$ в $\bar{G}_T$ существует единственное решение $\{p(\mu, x, t), q(\mu, x, t)\}$ задачи $\mu > 0$ и

$$\sum_{i=1}^n \max_{\bar{G}_T} |p^i(\mu, x, t)| + \sum_{j=1}^m \max_{\bar{G}_T} |q^j(\mu, x, t)| < C < \infty,$$

где C — постоянная, не зависящая от μ ;

- 2) каковы бы ни были $1 \leq i \leq r$ и $\varepsilon > 0$, $p_i(\mu, x, t) \xrightarrow{1} p_i(x, t)$ при $\mu \rightarrow 0$ равномерно в $\bar{G}_T[i_{T^*+\varepsilon}] \cup \bar{D}_T[i_{T^*-\varepsilon}]$;

- 3) $q(\mu, x, t) \xrightarrow{1} q(x, t)$ при $\mu \rightarrow 0$ равномерно в $\bar{G}_T$;

- 4) какова бы ни была замкнутая область $D \in \bar{G}_T$, не имеющая общих точек ни с одной характеристикой $x = \lambda_i t$, $x = \lambda_i(t - T^*)$, $1 \leq i \leq r$, $p_i(\mu, x, t) \xrightarrow{1} p_i(x, t)$, $p_x(\mu, x, t) \xrightarrow{1} p_x(x, t)$, $q_i(\mu, x, t) \xrightarrow{1} q_i(x, t)$, $q_x(\mu, x, t) \xrightarrow{1} q_x(x, t)$ при $\mu \rightarrow 0$ равномерно в D .

Соответствующие примеры показывают, что если предположения 1) и 2) теоремы 3 выполняются, а условие (*) не выполняется, то при любом сколь угодно малом $\mu > 0$ в $\bar{G}_T$ не существует решения задачи $\mu > 0$.

Теорема 4. Условие (*) выполняется, если справедливы утверждения 1)–3) теоремы 3.

Научно-исследовательский
радиофизический институт
Горький

Поступило
10 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Н. Гольдберг, ДАН, 195, № 3, 532 (1970). ² А. Н. Тихонов, Матем. сборн., 31 (73), 3, 574 (1952). ³ Л. С. Понтрягин, Изв. АН СССР, сер. матем., 21, № 5, 605 (1957). ⁴ Е. Ф. Мищенко, Л. С. Понтрягин, Изв. АН СССР, сер. матем., 23, № 5, 643 (1959). ⁵ Е. Ф. Мищенко, Изв. АН СССР, сер. матем., 21, № 5, 627 (1957). ⁶ А. А. Витт, ЖТФ, 4, 261 (1937). ⁷ J. Nagumo, M. Shimura, Proc. IRE, 49, № 8, 1281 (1961). ⁸ M. Shimura, IEEE Trans. CT-14, № 1, 60 (1967). ⁹ В. Н. Гольдберг, ДАН, 202, № 3, 518 (1972). ¹⁰ В. Н. Гольдберг, Дифференциальные уравнения, 9, № 10 (1973). ¹¹ Р. М. Минц, ДАН, 147, № 1, 31 (1962).