

А. В. ЗАРЕЛУА

ПОСТРОЕНИЕ СИЛЬНО БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ КОМПАКТОВ С ПОМОЩЬЮ КОЛЕЦ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком П. С. Александровым 16 IV 1973)

Настоящая работа является развитием идей нашей статьи ^(*). Ее основной результат был доложен на III Пражском симпозиуме по общей топологии.

Решается известная проблема Л. А. Тумаркина для сильно бесконечномерных (в смысле П. С. Александрова) компактов в следующем усиленном виде: *всякий сильно бесконечномерный метризуемый компакт X содержит такой подкомпакт Y , всякий подкомпакт S которого ($S \equiv Y \equiv X$) либо нульмерен, либо сильно бесконечномерен*. Компакт Y является множеством всех нулей всех функций из некоторого идеала I кольца $C(X)$ всех ограниченных непрерывных вещественных функций на X . Приводится характеристика сильной бесконечномерности в терминах кольца $C(X)$.

А. Введение и построение. Еще в 1935 г. была поставлена

Проблема (Л. А. Тумаркин). *Всякий ли бесконечномерный метризуемый компакт содержит подкомпаки любой конечной размерности?*

Она была решена отрицательно Д. Хендерсоном ^(*) только в 1965 г., улучшенный вариант приведен им же в ⁽⁷⁾, дальнейшее упрощение принадлежит Р. Бингу ⁽⁴⁾.

Известно несколько типов «сильной бесконечномерности»: в смысле П. С. Александрова ⁽¹⁾, в смысле Дж. Нагата ⁽²⁾, в смысле Ю. М. Смирнова ⁽⁵⁾. Самым сильным из них является определение П. С. Александрова, связанное со следующим удобным понятием перегородки.

Определение 1. Замкнутое множество Γ пространства X называется перегородкой между множествами A и B , если существуют такие открытые непересекающиеся окрестности OA и OB множеств A и B , что $X \setminus \Gamma = OA \cup OB$.

Определение 2 (П. С. Александров). Пространство X называется сильно бесконечномерным, если существует такая счетная система пар (A_k, B_k) замкнутых множеств A_k, B_k , что $A_k \cap B_k = \emptyset$ при каждом

k и, главное, что $\bigcap_{k=1}^{\infty} \Gamma_k \neq \emptyset$ для любых перегородок Γ_k между соответствующими множествами A_k и B_k .

Определение 3. Назовем пространство X наследственно сильно бесконечномерным, если всякое его замкнутое, но не нульмерное подпространство сильно бесконечномерно.

Это определение является усилением одного определения, данного Р. Бингом ⁽⁴⁾.

Основная теорема. *Всякий сильно бесконечномерный метризуемый компакт содержит наследственно сильно бесконечномерный подкомпакт.*

* Под пространством мы всегда, не оговаривая особо, будем понимать всякое нормальное хаусдорфово топологическое пространство, а под компактом — хаусдорфово компактное топологическое пространство.

Следствие. *Существуют наследственно сильно бесконечномерные метризуемые компакты.*

Это так хотя бы потому, что гильбертов куб сильно бесконечномерен, что фактически доказано, как отметил П. С. Александров в предисловии к книге ⁽³⁾, В. Гуревичем.

Очевидно, наш результат в известном смысле сильнее, чем у Хендерсона и Бинга. В то же время нам представляется, что построение не труднее, чем у Бинга, причем наша идея совсем другой природы.

Перед построением приведем еще одно вспомогательное

Определение 4. Счетную систему пар (A_k, B_k) множеств пространства X назовем существенной, если $\bigcap_{k=1}^{\infty} \Gamma_k \neq \emptyset$ для любых перегородок

Γ_k между соответствующими множествами A_k и B_k .

Сравнивая определения 2 и 4 получаем, что пространство X сильно бесконечномерно тогда и только тогда, когда оно имеет хотя бы одну существенную систему пар замкнутых множеств.

Доказательство теоремы. Предварительно на интервале $(-1/2, 1/2)$ построим такую систему интервалов $W_{i_1 i_2 \dots i_r}$, которая удовлетворяла бы следующим условиям:

W 1) $W_{i_1 \dots i_r} \supseteq W_{i_1 \dots i_r \dots i_t}$ для любых индексов;

W 2) $W_{i_1 \dots i_s} \cap W_{j_1 \dots j_r} = \emptyset$, если $s \leq t$ и $i_r \neq j_r$, хотя бы при одном номере $r, r \leq s$.

Это нетрудно сделать. Далее, пусть $V_{sj} = \bigcup_{i_1 \dots i_{s-1}} W_{i_1 \dots i_{s-1} j}$, а $\chi_{sj}(t) = \rho(t, R \setminus V_{sj})$, где R , как обычно, действительная прямая, а $\rho(t, t') = |t - t'|$.

Пусть X — сильно бесконечномерный метризуемый компакт. В нем имеется существенная система $\pi = \{(A_k, B_k)\}$ из пар замкнутых множеств A_k, B_k . Для каждого $k=1, 2, 3, \dots$ рассмотрим в пространстве $C(X)$ семейство Σ_k всех таких функций $\varphi \in C(X)$, что $\varphi > 0$ на A_k и $\varphi < 0$ на B_k . Разобьем множество $\sigma = \{\Sigma_k\}$ на два счетных множества $\sigma' = \{\Sigma_p'\}$ и $\sigma'' = \{\Sigma_q''\}$ (где $p, q=1, 2, 3, \dots$ дают нам новую более удобную нумерацию семейств Σ_k). В каждом из семейств Σ_p' выберем счетное плотное в Σ_p' подсемейство $\Sigma_p^0 = \{\xi_{pj}\}_{j=1}^{\infty}$. В семействе Ψ всех таких функций $\psi \in C(X)$, что $\psi(X) \subseteq [-1, 1]$, также выберем счетное плотное в нем подсемейство $\Psi^0 = \{\psi_k\}$. Будем считать, что функции ψ_k занумерованы таким образом, что каждая из них повторяется бесконечное число раз, т. е. для каждого k существует такая подпоследовательность k_i , что $\psi_k = \psi_{k_i}$ для всех i . Это сделать нетрудно. Наконец, рассмотрим идеал I , порожденный семейством всех функций вида $\xi_{mj} \chi_{mj}(\psi_m)$. Искомым наследственно сильно бесконечномерным подкомпактом компакта X будет множество

$$Y = V(I) = \{x \mid \varphi(x) = 0 \quad \forall \varphi \in I\}.$$

Для доказательства потребуется некоторое число определений, лемм и даже теорем как вспомогательного, так и самостоятельного характера.

В. Существенность семейств функций. Окончательно уловимся об обозначениях. Пусть $I(\Phi)$, где $\Phi \in C(X)$, означает идеал, порожденный семейством Φ (т. е. $I(\Phi)$ состоит в точности из всех таких конечных линейных комбинаций $\sum a_k \varphi_k$, что $\varphi_k \in \Phi, a_k \in C(X)$), а $V(\Phi) = \{x \mid \varphi(x) = 0 \quad \forall \varphi \in \Phi\}$. В частности, будут нужны идеалы $I(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ и множества $V(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ для случая конечного семейства $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ функций φ_i , а также и множества $V(I)$, где I — идеал.

Определение 5. Счетную систему σ , состоящую из семейств Σ_k функций из $C(X)$, назовем существенной, если каждый идеал вида $I(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, где $\varphi_1 \in \Sigma_1, \dots, \varphi_n \in \Sigma_n$, является собственным.

Связь между определениями существенности 4 (для систем $\pi = \{(A_k, B_k)\}$) и 5 оказывается достаточно простой. Предварительно определим важные для нас системы функций.

Определение 6. Вещественным разбиением пары (A, B) замкнутых множеств с $A \cap B \neq \emptyset$ назовем семейство R_{AB} , состоящее из всех таких функций $\varphi \in C(X)$, что $\varphi > 0$ на A , $\varphi < 0$ на B . Вещественным разбиением системы π пар (A_k, B_k) назовем $\sigma_\pi = \{R_{A_k B_k}\}$.

Лемма 1. Пусть X — счетно-компактное пространство, а π — счетная система пар его замкнутых таких множеств A_k, B_k , что $A_k \cap B_k = \emptyset$ при всех k ; в этих условиях π существенно тогда и только тогда, когда существенно ее вещественное разбиение σ_π .

С. χ -Полнота семейств функций. Зафиксируем какую-нибудь одну такую счетную последовательность χ действительных неотрицательных функций $\chi_k: R \rightarrow R$, что $\chi_k = 0$ вне интервала $(-1/2, 1/2)$ и $\chi_k \chi_l = 0$, как только $k \neq l$. Пусть $\psi \in C(X)$ и $\psi(X) \subseteq [-1, 1]$. Пусть, наконец, $\sigma = \{\Sigma_k\}$, где $\Sigma_k \in C(X)$, $k = 1, 2, \dots$, — счетное множество каких-то семейств функций кольца $C(X)$, а $T \subseteq C(X)$ — еще одно семейство.

Определение 7. Семейство T назовем χ -полным по паре (ψ, σ) , если для любых функций $\varphi_1 \in \Sigma_1, \dots, \varphi_n \in \Sigma_n$ и любых функций $\tau_1, \dots, \tau_m$ из T , удовлетворяющих условию:

- $\chi 1) 1 \in I(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \chi_1(\psi), \dots, \chi_m(\psi))$ найдется такая функция $\tau \in T$, что
- $\chi 2) \tau \chi_k(\psi) = \tau_k \chi_k(\psi) \bmod I(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Основными для нас примерами χ -полных семейств в этом смысле являются действительные разбиения.

Теорема 2. Пусть A и B — замкнутые непересекающиеся множества компакта X ; тогда для любого χ действительное разбиение R_{AB} пары (A, B) является χ -полным по любой паре (ψ, σ) .

Д. Доказательство основной теоремы. Предварительно потребуется еще одна важная вспомогательная теорема. Пусть как и в п. С при определении χ -полноты нам заданы на пространстве X такая функция $\psi \in C(X)$, что $\psi(X) \subseteq [-1, 1]$, и счетная последовательность неотрицательных функций $\chi_k: R \rightarrow R$, обращающихся в нуль вне интервала $(-1/2, 1/2)$ и главные таких, что $\chi_j \chi_k = 0$ при $j \neq k$.

Для удобства распространим понятие ограничения функции на семейства функций и на системы семейств естественным способом: для любых $Z \subseteq X$, $\Sigma \subseteq C(X)$ и $\sigma = \{\Sigma\}$ пусть $\Sigma|Z = \{\varphi|Z | \varphi \in \Sigma\}$, а $\sigma|Z = \{\Sigma|Z | \Sigma \in \sigma\}$.

Теорема 3. Пусть для компакта X даны семейство $\Sigma \subseteq C(X)$ и счетная система $\sigma = \{\Sigma_k\}$ семейств $\Sigma_k \subseteq C(X)$. Если Σ является χ -полной по паре (ψ, σ) , а система $\sigma \cup \Sigma$ существенна, то для любого счетного набора функций $\xi_j \in \Sigma$ ограничение $\sigma|V(I)$ системы σ на компакте $V(I)$, где I — идеал, порожденный всеми функциями вида $\xi_j \chi_j(\psi)$, также существенно и, кроме того, $V(I) \setminus V(\chi_j(\psi)) \subseteq V(\xi_j)$.

Доказательство основной теоремы. В построении утверждается, что множество $Y = V(I)$ для идеала I , порожденного всеми функциями $\xi_m \chi_m(\psi_m)$, будет наследственно сильно бесконечномерным подкомпактом компакта X . Пусть $Y_1 = V\{\xi_1 \chi_1(\psi_1)\}_{j=1}^\infty$. В силу теорем 2 и 3 ограничение на Y_1 системы $\sigma_1 = \{\Sigma_p'\}_{p=2}^\infty \cup \{\Sigma_q''\}_{q=1}^\infty$ существенно на Y_1 и, кроме того, $Y_1 \setminus V(\chi_{1j}(\psi_1)) \subseteq V(\xi_{1j})$. Рассуждая аналогично, мы построим последовательность подкомпактов $X \supseteq Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots \supseteq Y_s \supseteq \dots$ таких, что ограничение на Y_s системы $\sigma_s = \{\Sigma_p'\}_{p=s+1}^\infty \cup \{\Sigma_q''\}_{q=1}^\infty$ существенно на Y_s и

$$Y_s \setminus V(\chi_{sj}(\psi_s)) \subseteq V(\xi_{sj}). \quad (1)$$

В частности, ограничения на Y_s системы $\{\Sigma_q''\}_{q=1}^\infty$ существенны на каж-

дом Y_s и потому в силу компактности ограничение на $Y = \bigcap_{s=1}^\infty Y_s$ системы

$\{\Sigma_q''\}_{q=1}^\infty$ будет существенно и на Y . В силу леммы 3 пространство Y сильно бесконечномерно.

Пусть S — невырожденный континуум в Y . Найдем функцию ψ на X со значениями в $[-1, 1]$, достигающую на S значений ± 1 , и пусть функция $\psi_0 \in \{\psi_m\}$ такова, что $|\psi(x) - \psi_0(x)| < 1/2$ для $x \in X$. По построению функция ψ_0 повторяется бесконечное число раз в множестве $\{\psi_m\}$; пусть $\psi_0 = \psi_{m_1} = \psi_{m_2} = \dots$. Мы утверждаем, что ограничение на S семейства функций $\{\Sigma_{m_r}'\}_{r=1}^\infty$ существенно на S ; в силу леммы 1 отсюда будет следовать сильная бесконечномерность компакта S . Предположим противное, система $\{\Sigma_{m_r}'\}_{r=1}^\infty$ не существенна на S . Тогда существуют функции $\xi_{m_r j_r} \in \Sigma_{m_r}'$ та-

кие, что $S \cap \bigcap_{r=1}^n V(\xi_{m_r j_r}) = \emptyset$. Пусть α — некоторый набор натуральных чисел,

содержащий j_r , $\alpha = i_1 \dots i_{m_1-1} j_1 \dots i_{m_n-1} j_n$, $W_\alpha = W_{i_1 \dots j_n}$. Тогда $W_\alpha \in V_{m_r j_r}$ для $1 \leq r \leq n$ согласно свойствам системы интервалов $W_{i_1 \dots i_n}$ и определению множеств V_{m_j} . Но в силу (1) и определения функций χ_{m_j} пересечение

$$Y \cap \bigcap_{r=1}^n \psi_{m_r}^{-1}(V_{m_r j_r}) = Y \cap \bigcap_{r=1}^n [Y_{m_r} \setminus V(\chi_{m_r j_r}(\psi_{m_r}))] \subseteq Y \cap \bigcap_{r=1}^n V(\xi_{m_r j_r}).$$

Таким образом,

$$S \cap \psi_0^{-1}(W_\alpha) \subseteq S \cap \bigcap_{r=1}^n \psi_{m_r}^{-1}(V_{m_r j_r}) \subseteq S \cap \bigcap_{r=1}^n V(\xi_{m_r j_r}) = \emptyset.$$

Если $W_\alpha = (a, b)$, то отсюда следует, что S представимо в виде объединения непересекающихся непустых замкнутых множеств $\psi_0^{-1}[-1, a] \cap S$ и $\psi_0^{-1}[b, 1] \cap S$, что противоречит связности S . Теорема доказана, так как каждое ненульмерное компактное подмножество содержит невырожденные подконтинуумы.

Автор выражает признательность Ю. М. Смирнову за многочисленные замечания, способствовавшие значительному улучшению первоначального варианта статьи.

Математический институт им. А. М. Размадзе
Академии наук ГрузССР
Тбилиси

Поступило
30 III 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ П. С. Александров, УМН, 5, № 2, 25 (1960). ² J. Nagata, Modern Dimension Theory, 1965. ³ В. Гуревич, Г. Воллман, Теория размерности, 1948. ⁴ R. H. Bing, Proc. Second Prague Top. Symp., 1966, p. 56. ⁵ Е. Г. Склиаренко, Изв. АН СССР, 23, 197 (1959). ⁶ D. W. Henderson, An Infinite-dimensional Compactum with no Positive-dimensional Compact Subsets, Multilithed, 1965. ⁷ D. W. Henderson, Am. J. Math., 89, 105 (1967). ⁸ D. W. Henderson, Am. J. Math., 89, 122 (1967). ⁹ A. V. Zarelua, Theory of Sets and Topology, Berlin, 1972, p. 509.