

А. П. ШОСТАК

ШЕЙПОВАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ В КЛАССАХ КОМПАКТНОСТИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 4 V 1973)

Понятие шейпа (или фундаментального типа) метрического компакта, представляющее собой своего рода модификацию понятия гомотопического типа, было введено К. Борсуком в 1968 г. ^(1, 2). В 1971 г. С. Мардешич и Дж. Сегал с помощью так называемых ANR-спектров определили и изучили шейповскую эквивалентность для бикомпактов, которая в случае метрических пространств совпадает с шейповым отношением Борсука ^(3, 4). Приблизительно в то же время Р. Фокс определяет отношение шейповой эквивалентности в произвольной категории и, исходя из этого определения, изучает шейповую эквивалентность в классе метрических пространств, которая в случае компактов также совпадает с шейповой эквивалентностью Борсука ⁽⁵⁾.

Пусть $\mathcal{E}$ — некоторый класс топологических пространств, представленный в виде объединения своих подклассов, т. е. $\mathcal{E} = \bigcup \{ \mathcal{E}_\alpha : \alpha \in A \} \cup \mathcal{E}_0$. Поставим каждому $\alpha \in A$ в соответствие некоторый кардинал τ_α . Полученную систему классов пространств с зафиксированными мощностями обозначим $\mathcal{E}$, $\mathcal{E} = \{ (\mathcal{E}_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in A}, \mathcal{E}_0 \}$. Пусть $\pi(\mathcal{E})$ — совокупность всевозможных произведений P пространств из $\mathcal{E}$ таких, что пространства из $\mathcal{E}_\alpha$ входят в P в качестве сомножителей в числе, не превосходящем τ_α . Пространство X будем называть $\mathcal{E}$ -компактным и писать $X \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$, если X гомеоморфно замкнутому подпространству некоторого $P \in \pi(\mathcal{E})$.

Данная статья посвящена определению отношения шейповой эквивалентности в классах $\mathcal{E}$ -компактных пространств и изучению ее свойств. Связь между этой и ранее изучавшимися фундаментальными характеристиками установлена в теоремах 4—6.

1. Пусть $\mathcal{E}$ — некоторая система топологических пространств.

Определение 1. $\mathcal{E}$ -спектром назовем обратный спектр $\underline{X} = \{ U_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A \}$, где все U_α принадлежат $ANE(\pi(\mathcal{E}))$.

Определение 2. Пусть $\underline{X}, \underline{Y} = \{ V_\beta, q_{\beta\beta'}, B \}$ — $\mathcal{E}$ -спектры. Фундаментальной направленностью из $\underline{X}$ в $\underline{Y}$ ($f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$) назовем такую систему $\underline{f} = \{ f, \{ f_\beta \}_{\beta \in B} \}$, где $f: B \rightarrow A$ — возрастающая функция и для каждого β $f_\beta: U_{f(\beta)} \rightarrow V_\beta$ — непрерывное отображение, что $f_\beta p_{f(\beta)} \simeq q_{\beta\beta'} f'_\beta$ для произвольных $\beta < \beta'$. В дальнейшем наряду с записью $\{ f, \{ f_\beta \}_{\beta \in B} \}$ будем применять сокращенную запись $\{ f_\beta \}$.

Подобно ⁽³⁾, рассмотрим для каждого $\mathcal{E}$ категорию $\mathcal{C}_\mathcal{E}$, объектами которой являются $\mathcal{E}$ -спектры, а в качестве морфизмов берутся фундаментальные направленности. Тожественный морфизм $1: \underline{X} \rightarrow \underline{X}$ определим как морфизм, состоящий из тождественных отображений $1: A \rightarrow A$ и $1_\alpha: U_\alpha \rightarrow U_\alpha$. В качестве композиции gf морфизмов $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ и $g: \underline{Y} \rightarrow \underline{Z} = \{ W_\gamma, r_{\gamma\gamma'}, \Gamma \}$ возьмем морфизм, состоящий из функции $fg: \Gamma \rightarrow A$ и набора $\{ g_\gamma f_{g(\gamma)}, \Gamma \}$ отображений $g_\gamma f_{g(\gamma)}: U_{f(g(\gamma))} \rightarrow W_\gamma$. Легко проверяется, что при таком определении $\mathcal{C}_\mathcal{E}$ действительно является категорией.

Определение 3. Фундаментальные направленности $\underline{f}, \underline{g}$, отображающие $\mathcal{E}$ -спектр $\underline{X}$ в $\mathcal{E}$ -спектр $\underline{Y}$, назовем гомотопными, если для каждого β найдется $\alpha > f(\beta)$, $g(\beta)$ такое, что $f_\beta p_{f(\beta)\alpha} \simeq g_\beta p_{g(\beta)\alpha}$. При этом будем писать $\underline{f} \simeq \underline{g}$ или просто $\underline{f} \simeq \underline{g}$.

Доказательство следующих предложений легко провести совершенно аналогично доказательству соответствующих утверждений из (3).

Предложение 1. Отношение $\simeq$ является отношением эквивалентности на множестве всех морфизмов в категории $\mathcal{E}_3$.

Предложение 2. Если $f, f': X \rightarrow Y$ и $g, g': Y \rightarrow Z$ — попарно гомотопные фундаментальные направленности ($f \simeq f', g \simeq g'$), то $gf \simeq g'f': X \rightarrow Z$.

Определение 4. Будем говорить, что $\mathcal{E}$ -спектры $\underline{X}$ и $\underline{Y}$ $\mathcal{E}$ -гомотопически эквивалентны, и писать $\underline{X} \simeq \underline{Y}$ или просто $\underline{X} \simeq \underline{Y}$, найдутся морфизмы $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$, $g: \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ такие, что $fg \simeq 1_X$, $gf \simeq 1_Y$.

Предложение 3. Отношение $\simeq$ является отношением эквивалентности на множестве всех $\mathcal{E}$ -спектров.

Определение 5. Совокупность всех $\mathcal{E}$ -спектров, гомотопически эквивалентных данному $\mathcal{E}$ -спектру $\underline{X}$, назовем $\mathcal{E}$ -типом $\underline{X}$ и обозначим $[\underline{X}]$ (ср. определение из (3), стр. 44).

Пусть X — $\mathcal{E}$ -компактное пространство и i — некоторое замкнутое вложение X в $P \in \pi(\mathcal{E})$. Скажем, что $\mathcal{E}$ -спектр $\underline{X}$ ассоциирован с замкнутым вложением i , если $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ есть база окрестностей iX в P и $p_{\alpha\alpha'}$ — естественное вложение $U_{\alpha'}$ в U_α .

Рассмотрим некоторые $\mathcal{E}$ -спектры $\underline{X}, \underline{Y}$, ассоциированные с замкнутыми вложениями i, j $\mathcal{E}$ -компактных пространств X, Y в пространства P, Q соответственно. Пусть $f = \{f_\beta\}$, $g = \{g_\beta\}$ — фундаментальные направленности из $\underline{X}$ в $\underline{Y}$. Нетрудно видеть, что $\underline{f}$ и $\underline{g}$ гомотопны тогда и только тогда, когда для каждой окрестности множества jY в Q найдется такой индекс β_1 , что при $\beta > \beta_1$ $f_\beta \simeq g_\beta$ в V на некоторой окрестности $O = O(\beta)$ множества iX в P .

Определение 6. Пусть $\underline{X}, \underline{Y}$ — некоторые $\mathcal{E}$ -спектры, ассоциированные с замкнутыми вложениями $i: X \rightarrow P, j: Y \rightarrow Q$ соответственно. Будем говорить, что фундаментальная направленность $\underline{f}: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ порождает отображение $f: X \rightarrow Y$, если найдется такое β_1 , что $f_\beta p_{f(\beta)} \simeq g_\beta f \forall \beta > \beta_1$.

Предложение 4. Пусть $\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}$ — $\mathcal{E}$ -спектры, ассоциированные с замкнутыми вложениями $i: X \rightarrow P, j: Y \rightarrow Q, k: Z \rightarrow R, P, Q, R \in \pi(\mathcal{E})$, соответственно и предположим, что фундаментальные направленности $\underline{f}: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}, \underline{g}: \underline{Y} \rightarrow \underline{Z}$ порождают отображения $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ соответственно.

Тогда фундаментальная направленность $\underline{gf}: \underline{X} \rightarrow \underline{Z}$ порождает отображение $gf: X \rightarrow Z$. Фундаментальная направленность $1_X: \underline{X} \rightarrow \underline{X}$ порождает отображение $1_X: X \rightarrow X$.

2. Целью этого параграфа является определение отношения шейповой эквивалентности в классе $\mathcal{E}$ -компактных пространств. Для того чтобы это отношение удовлетворяло некоторым «естественным» условиям (см. теорему 1) здесь и в дальнейшем будем предполагать, что система $\mathcal{E}$ удовлетворяет следующим условиям

1°) Каждое пространство $Q \in \pi(\mathcal{E})$ является абсолютным окрестностным экстензором для класса $\pi(\mathcal{E})$, другими словами, $\pi(\mathcal{E}) \subset \text{ANE}(\pi(\mathcal{E}))$.

2°) Каждое пространство является окрестностным экстензором для пар вида $(P \times J, A)$, где $P \in \pi(\mathcal{E})$, а множество A имеет вид $A = B \times \{0\} \cup C \times J \cup B \times \{1\}$ для некоторых замкнутых $B, C \subset P$.

Замечание 1. Из условия 1°) следует, что каждое открытое $V \subset Q$, где $Q \in \pi(\mathcal{E})$, является абсолютным окрестностным экстензором в классе $\pi(\mathcal{E})$.

Замечание 2. Условие 2°) следует из условия 1°), например, в том случае, когда класс $\pi(\mathcal{E})$ замкнут относительно произведения на отрезок $[0, 1]$ или, что более обще, на пространство E , содержащее отрезок.

Замечание 3. Легко видеть, что $Q \in A(N)E(\pi(\mathcal{E}))$ тогда и только тогда, когда $Q \in A(N)E(\mathfrak{K}(\mathcal{E}))$.

Можно доказать следующие три леммы.

Лемма 1. При любых замкнутых вложениях $i: X \rightarrow P$, $j: Y \rightarrow Q$ $\mathcal{E}$ -компактных пространств X , Y и произвольных ассоциированных с ними $\mathcal{E}$ -спектров $\underline{X}$, $\underline{Y}$ всякое отображение $f: X \rightarrow Y$ порождается некоторой фундаментальной направленностью $\underline{f}: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$.

Лемма 2. Пусть $\underline{X}$, $\underline{X}$ — $\mathcal{E}$ -спектры, ассоциированные с замкнутыми вложениями пространств X и Y . Фундаментальные направленности $\underline{f}, g: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ гомотопны тогда и только тогда, когда для каждой окрестности $V \supset \supset jY$ найдется такой индекс β_1 , что $f_\beta \simeq g_\beta$ на iX в V при $\beta > \beta_1$.

Лемма 3. Для любых гомотопных отображений $f, g: X \rightarrow Y$ всякие порождающие их фундаментальные направленности $\underline{f}, g: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ гомотопны.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{E}$ -компактные пространства X и Y гомотопически эквивалентны.

Тогда любые $\mathcal{E}$ -спектры $\underline{X}$ и $\underline{Y}$, ассоциированные с их замкнутыми вложениями $i: X \rightarrow P$, $j: Y \rightarrow Q$, $P, Q \in \pi(\mathcal{E})$, $\mathcal{E}$ -эквивалентны. Другими словами, из $X \simeq Y$ следует $\underline{X} \simeq \underline{Y}$.

Следствие 1. Для любых двух замкнутых вложений i, j $\mathcal{E}$ -компактного пространства X в пространстве класса $\pi(\mathcal{E})$ любые ассоциированные с ними $\mathcal{E}$ -спектры $\underline{X}$ и $\underline{X}'$ $\mathcal{E}$ -эквивалентны.

Определение 7. $\mathcal{E}$ -компактные пространства X и Y будем называть $\mathcal{E}$ -эквивалентными, если ассоциированные с ними $\mathcal{E}$ -спектры $\mathcal{E}$ -эквивалентны. Если X и Y $\mathcal{E}$ -эквивалентны, то будем писать $X \simeq Y$.

Следствие 2. Для любой системы $\mathcal{E}$ (удовлетворяющей условиям 1⁰), 2⁰) отношение $\simeq$ между пространствами класса $\mathfrak{K}(\mathcal{E})$ не зависит от

выбора замкнутых вложений. Отношение $\simeq$ разбивает пространства из $\mathfrak{K}(\mathcal{E})$ на классы эквивалентности.

Определение 8. Совокупность всех $\mathcal{E}$ -компактных пространств, $\mathcal{E}$ -эквивалентных данному $X \in \mathfrak{K}(\mathcal{E})$, будем обозначать $\text{Sh}_{\mathcal{E}}X$ и называть шейпом X относительно системы $\mathcal{E}$.

Пусть $X \in \mathfrak{K}(\mathcal{E}_1) \cap \mathfrak{K}(\mathcal{E}_2)$ и системы $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ удовлетворяют условиям 1⁰), 2⁰). Тогда определены шейп X относительно системы $\mathcal{E}_1$ и шейп X относительно системы $\mathcal{E}_2$. Следующая теорема устанавливает соотношение между этими шейпами.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{K}(\mathcal{E}_1) \subset \mathfrak{K}(\mathcal{E}_2)$. Тогда для любого $X \in \mathfrak{K}(\mathcal{E}_1)$ имеет место равенство $\text{Sh}_{\mathcal{E}_2}X = \text{Sh}_{\mathcal{E}_1}X \cap \mathfrak{K}(\mathcal{E}_2)$.

Следствие 1. Пусть $X \in \mathfrak{K}(\mathcal{E}_1) \cap \mathfrak{K}(\mathcal{E}_2)$. Тогда $\text{Sh}_{\mathcal{E}_2}X \cap \mathfrak{K}(\mathcal{E}_2) = \text{Sh}_{\mathcal{E}_1}X \cap \mathfrak{K}(\mathcal{E}_1)$.

Следствие 2. Если системы $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ таковы, что $\mathfrak{K}(\mathcal{E}_1) = \mathfrak{K}(\mathcal{E}_2)$ и $X \in \mathfrak{K}(\mathcal{E}_1)$, тогда $\text{Sh}_{\mathcal{E}_2}X = \text{Sh}_{\mathcal{E}_1}X$. Другими словами, шейп пространства зависит только от класса компактности и не зависит от выбора системы.

Теорема 1 утверждает, что гомотопически эквивалентные пространства X, Y являются $\mathcal{E}$ -эквивалентными для любой «подходящей» системы $\mathcal{E}$. Следующая теорема определяет достаточные условия, когда справедливо и обратное утверждение.

Теорема 3. Пусть класс $\pi(\mathcal{E})$ замкнут относительно произведения на отрезок, $X, Y \in \mathfrak{K}(\mathcal{E})$ и $X, Y \in \text{ANE}(\pi(\mathcal{E}))$. Тогда пространства X, Y гомотопически эквивалентны в том и только в том случае, когда они $\mathcal{E}$ -эквивалентны.

3. В этом разделе устанавливается связь рассмотренного в данной статье понятия шейпа в классе $\mathcal{E}$ -компактных пространств с известными шейповыми характеристиками топологических пространств.

Теорема 4. Шейп метрического компакта в смысле К. Борсука совпадает с шейпом относительно системы $\{(J, \aleph_0)\}$, т. е. с шейпом метрического компакта в классе метрических компонентов.

Теорема 5. Шейп бикомпакта, определенный С. Мардашичем и Дж. Сегалом ⁽³⁾, совпадает с шейпом относительно системы $\{J\}$, т. е. с шейпом бикомпакта в классе бикомпактов.

Теорема 6. Шейп метрического пространства в смысле Р. Фокса совпадает с шейпом относительно системы $\{(ANR(M), 1)\}$, где M — класс метризуемых пространств, т. е. с шейпом метрического пространства в классе метрических пространств.

4. Приведем некоторые примеры, когда может быть определен шейп топологического пространства по общей схеме, рассмотренной в данной работе. Справедлива следующая *

Теорема А. Топологическое пространство является полным метрическим сепарабельным пространством тогда и только тогда, когда оно принадлежит классу $\aleph(\mathcal{E}_1)$, где $\mathcal{E}_1 = \{(R, \aleph_0)\}$.

Очевидно, что $\mathcal{E}_1$ удовлетворяет условиям 1° , 2° . Следовательно, определен шейп в классе полных метрических сепарабельных пространств.

Теорема Б. Топологическое пространство является полным в смысле Чеха финально-компактным пространством тогда и только тогда, когда оно принадлежит классу $\aleph(\mathcal{E}_2)$, где $\mathcal{E}_2 = \{(R, \aleph_0), J\}$.

Система $\mathcal{E}_2$ удовлетворяет условиям 1° , 2° , следовательно, определен шейп в классе полных финально-компактных пространств.

Теорема В. Пусть $\mathcal{E}_3 = \{(J_\sigma, \aleph_0), J\}$, где J_σ — метрический ёж колючести σ . Класс полных в смысле Чеха паракомпактов совпадает с классом $\aleph(\mathcal{E}_3)$. Другими словами, топологическое пространство является полным в смысле Чеха паракомпактом тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно замкнутому подпространству произведения счетного числа ежей на тихоновский куб.

Нетрудно видеть, что $\mathcal{E}_3$ удовлетворяет условиям 1° , 2° . Следовательно, определен шейп в классе полных в смысле Чеха паракомпактов.

Теорема Г**. Класс p -паракомпактов совпадает с классом $\aleph(\mathcal{E}_4)$, где $\mathcal{E}_4 = \{(ANR(M), 1), J\}$. Другими словами, пространство является паракомпактом тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно замкнутому подпространству произведения метрического абсолютного окрестного ретракта на тихоновский куб.

С другой стороны, как показал Ю. Лисица, абсолютный окрестностный ретракт в классе метрических пространств является окрестностным экстензором и для p -паракомпактов (см. ⁽⁶⁾). Отсюда и из теоремы Г нетрудно убедиться, что система $\mathcal{E}_4$ удовлетворяет условиям 1° , 2° . Следовательно, определен шейп в классе p -паракомпактов.

Ясно, что $\aleph(\mathcal{E}_1) \subset \aleph(\mathcal{E}_2) \subset \aleph(\mathcal{E}_3) \subset \aleph(\mathcal{E}_4)$, класс $\aleph(\mathcal{E}_2)$ содержит все бикомпакты, класс $\aleph(\mathcal{E}_4)$ — все метрические пространства. Отсюда и из теоремы 2 устанавливается связь между соответствующими шейпами.

Автор выражает глубокую благодарность проф. Ю. М. Смирнову за постоянное внимание к работе, а также С. Богатому за полезные обсуждения.

Латвийский государственный университет
им. П. Стучки
Рига

Поступило
14 III 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ K. Borsuk, Fund. Math., 62, 223 (1968). ² K. Borsuk, Proc. Intern. Top. Symp. Hercognovi 1968, Beograd, 1969, p. 98. ³ S. Mardešić, J. Segal, Fund. Math., 72, 41 (1972). ⁴ S. Mardešić, J. Segal, Fund. Math., 72, 61 (1972). ⁵ R. Fox, Fund. Math., 74, 47 (1972). ⁶ Ю. Лисица, Сиб. матем. журн., 14, № 1, 128 (1973).

* Теоремы А — В и некоторые другие результаты, связанные с понятием $\mathcal{E}$ -компактности, будут опубликованы в Бюлл. Польской академии наук, сер. матем.

** Этот результат сообщен мне С. Богатым.