Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 2

УДК 517.537 **МАТЕМАТИКА**

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ, С. И. ИБРАГИМОВ

О ПОЛНОТЕ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ НА КРИВЫХ

Пользуясь обозначениями из книги ([1]), рассмотрим линейное нормированное пространство $A_R^{(p)}(\Gamma;\ \mu)$ функций $F(z)$, принадлежащих одновременно пространствам $L_p(\Gamma;\ \mu)$ и $A(|z|<R)$, где Γ — спрямляемый контур, расположенный в круге $|z|<R$ (см. также ([2])).

В настоящей статье при предположении, что $F(z)\in A_R^{(p)}(\Gamma;\ \mu)$, указываются условия полноты систем функций $\{F(\lambda_n z)\}$ и $\{z^n F^{(n)}(\lambda_n z)\}$ по норме пространства $L_p(\Gamma;\ \mu)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, где $\{\lambda_n\}$ — некоторая последовательность комплексных чисел. В работе ([2]) доказано следующее

Утверждение. *Пусть спрямляемый контур* Γ *целиком лежит в угле* $|\arg z|\leqslant\pi\sigma$, $0\leqslant\sigma\leqslant 1$, *а последовательность положительных чисел* $\{\mu_n\}$ *удовлетворяет условию*

$$\int^{+\infty}\frac{n(u)-\sigma u}{u^2}\,du=+\infty,$$

где $n(u)$ — *число точек* μ_n *в интервале* $(0,u)$.

Тогда система функций $\{z^{\mu_n}\}$ *полна в пространстве* $L_p(\Gamma;\ \mu)$.

Для целой функции $F(z)\in A_\infty^{(p)}(\Gamma;\ \mu)$ введем в рассмотрение следующие величины:

$$M_p(F;\Gamma;r)=\max_{|z|=r}\left(\int_\Gamma |F(tz)|^p\,d\mu(z)\right)^{1/p}$$

и

$$S_F(\Gamma;r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\max_{z\in\Gamma}|F(zre^{i\theta})|\cdot d\theta.$$

Через $N(r)$ обозначим функцию Неванлинна последовательности $\{\lambda_n\}$,

$$N(r)=\int_0^r\frac{n(t)}{t}\,dt,$$

где $N(r)$ — число точек последовательности $\{\lambda_n\}$ в круге $|w|<r$.

Теорема 1. *Пусть спрямляемый контур* Γ *целиком расположен в области* $\{|z|<R,\ |\arg z|\leqslant\pi\sigma,\ 0\leqslant\sigma\leqslant 1\}$, *а функция* $F(z)\in A_R^{(p)}(\Gamma;\ \mu)$ *такова, что* $F^{(\mu_n)}(0)\neq 0$, $F^{(\nu_n)}(0)=0$, $n=0,1,\ldots$, *где* $\{\mu_n\}=\{n\}\setminus\{\nu_n\}$, *причем последовательность положительных чисел* $\{\mu_n\}$ *удовлетворяет условию*

$$\int^{+\infty}\frac{n(u)-\sigma u}{u^2}\,du=+\infty. \tag{1}$$

Тогда, если для последовательности комплексных чисел $\{\lambda_n\}$, $|\lambda_n|<1$, *выполняется условие*

$$\lim_{r\to 1-0}N(r)=-\infty, \tag{2}$$

то система функций $\{F(\lambda_n z)\}$ *полна в пространстве* $L_p(\Gamma;\ \mu)$.

Доказательство. Каждый линейный непрерывный функционал $\Phi[F]$ в пространстве $L_p(\Gamma;\,\mu)$ имеет вид

$$\Phi[F]=\Phi_g[F]=\int\limits_\Gamma F(z)\,g(z)\,d\mu(z),$$

где $g(z)\in L_q(\Gamma;\,\mu)$, $1/p+1/q=1$. Согласно известной теореме С. Банаха ([3]) для доказательства нашего утверждения достаточно установить, что любой линейный непрерывный функционал в $L_p(\Gamma;\,\mu)$, аннулирующийся на функциях системы $\{F(\lambda_n z)\}$, обращается в нуль на всем пространстве, т. е. $g(z)\equiv 0$ почти всюду по мере $\mu(z)$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(t)=\int\limits_\Gamma F(tz)\,g(z)\,d\mu(z), \tag{3}$$

где $g(z)\in L_q(\Gamma;\,\mu)$. Имеем

$$\Phi[F(\lambda_n z)]=\varphi(\lambda_n)=\int\limits_\Gamma F(\lambda_n z)\,g(z)\,d\mu(z)=0. \tag{4}$$

Требуется показать, что из выполнения условий (4) следует, что $g(z)\equiv 0$ почти всюду по мере $\mu(z)$. Легко видеть, что $\varphi(t)\in A(|z|<1)$.

В силу известной теоремы единственности для ограниченных функций, если функция $u(t)\in A_R$ такова, что $u(\lambda_n)=0$, то из условия $\lim\limits_{r\to R-0} N(r)=-\infty$, где $N(r)$ — функция Неванлинна последовательности $\{\lambda_n\}$, следует, что $u(t)\equiv 0$ (см. ([1]), стр. 42).

В силу этой теоремы единственности из соотношений (4) следует, что функция $\varphi(t)\equiv 0$. Но тогда в силу единственности степенного ряда все коэффициенты Тейлора функции $\varphi(z)$ равны нулю, т. е. $\varphi^{(n)}(0)=0$, $n=0,\,1,\,\ldots$ Учитывая условие теоремы $F^{(\mu_n)}(0)\neq 0$, $F^{(\nu_n)}(0)=0$, $n=0,\,1,\,\ldots$, получим

$$\Phi[z^{\mu_n}]=\varphi^{(\mu_n)}(0)=\int\limits_\Gamma z^{\mu_n}F^{(\mu_n)}(0)\,g(z)\,d\mu(z)=0.$$

Следовательно, исходная система будет полной в $L_p(\Gamma;\,\mu)$, так как в силу условия (1) теоремы полной в нем является система $\{z^{\mu_n}\}$ (см. ([2])). В самом деле, из полноты системы функций $\{z^{\mu_n}\}$ в $L_p(\Gamma;\,\mu)$ следует, что $g(z)\equiv 0$ почти всюду по мере $\mu(z)$. Но тогда из соотношений (3) следует полнота системы $\{F(\lambda_n z)\}$ в пространстве $L_p(\Gamma;\,\mu)$.

Замечание. 1. В теореме 1 в случае, когда $F^{(n)}(0)\neq 0$, $n=0,\,1,\,\ldots$, условие (1) отпадает, так как система $\{z^n\}$ полна в пространстве $L_p(\Gamma;\,\mu)$.

Теорема 2. *Пусть спрямляемый контур* Γ *целиком расположен в угле* $|\arg z|<\pi\sigma$, $0\leqslant\sigma\leqslant 1$, *а целая функция* $F(z)\in A_\infty^{(p)}(\Gamma;\,\mu)$ *такова, что* $F^{(\mu_n)}(0)\neq 0$, $F^{(\nu_n)}(0)=0$, $n=0,\,1,\,\ldots$, *где* $\{\mu_n\}=\{n\}\setminus\{\nu_n\}$, *причем последовательность положительных чисел* $\{\mu_n\}$ *удовлетворяет условию* (1).

Тогда, если для последовательности комплексных чисел $\{\lambda_n\}$ *выполняется условие*

$$\lim_{r\to\infty}\,[S_F(\Gamma;\,r)-N(r)]=-\infty \tag{5}$$

или

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{\ln M_p[F;\,\Gamma;\,r]}{N(r)}<1, \tag{6}$$

то система функций $\{F(\lambda_n z)\}$ *полна в пространстве* $L_p(\Gamma;\,\mu)$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(t)$, определяемую равенством (3), удовлетворяющую условиям, что $\varphi(\lambda_n)=0$, $n=0,\,1,\,\ldots$, и покажем, что при этом $g(z)\equiv 0$ почти всюду по мере $\mu(z)$.

Легко видеть, что $\varphi(t)$ есть целая функция. Согласно неравенству Гёльдера имеем

$$|\varphi(t)| \leqslant \left\{ \int_\Gamma |F(tz)|^p \, d\mu(z) \right\}^{1/p} \cdot \left\{ \int_\Gamma |g(z)|^q \, d\mu(z) \right\}^{1/p}. \tag{7}$$

В силу теорем единственности для целых функций, если функция $u(t)$ такова, что $u(\lambda_n)=0$, то из условия

$$\lim_{r\to\infty} [S_u(r) - N(r)] = -\infty, \quad S_u(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|u(re^{i\theta})| \cdot d\theta,$$

или

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(u; r)}{N(r)} < 1$$

следует, что $u(t) \equiv 0$ (см. ([1]), стр. 52).

Из неравенства (7), учитывая условие (5), (6) теоремы, имеем

$$\lim_{r\to\infty} [S_\varphi(r) - N(r)] \leqslant \lim_{r\to\infty} [S_F(\Gamma;\ r) - N(r)] = -\infty$$

и

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(\varphi; r)}{N(r)} \leqslant \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M_p(F; \Gamma; r)}{N(r)} < 1.$$

Из этих неравенств, в силу приведенной выше теоремы единственности для целых функций следует, что $\varphi(t) \equiv 0$. Но тогда, в силу единственности степенного ряда, все коэффициенты Тейлора функции $\varphi(t)$ равны нулю, т. е. $\varphi^{(n)}(0) = 0$. Учитывая условия теоремы $F^{(\mu_n)}(0) \neq 0$, $F^{(\nu_n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, \ldots$, получим

$$\Phi[z^{\mu_n}] = \varphi^{(\mu_n)}(0) = \int_\Gamma z^{\mu_n} F^{(\mu_n)}(0) \, g(z) \, d\mu(z) = 0,$$

Таким образом, функционал Φ аннулируется на всех функциях системы $\{z^{\mu_n}\}$. Следовательно, исходная система будет полной в $L_p(\Gamma;\ \mu)$, так как в силу условия (1) теоремы полной в нем является система $\{z^{\mu_n}\}$.

Замечание 2. Полнота системы $\{F(\lambda_n z)\}$, когда $F(z)$ — целая функция, в пространстве $L_p(0, R)$, $0 < R < \infty$, рассматривалась И. И. Ибрагимовым другим методом ([4]).

Теорема 3. *Пусть спрямляемый контур* Γ *целиком расположен в области* $\{|z| < R,\ |\arg z| \leqslant \pi\sigma,\ 0 \leqslant \sigma \leqslant 1\}$, *а функция* $F(z) \in A_R^{(p)}(\Gamma;\ \mu)$ *такова, что* $F^{(\mu_n)}(0) \neq 0$, $F^{(\nu_n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, \ldots$, *где* $\{\mu_n\} = \{n\} \setminus \{\nu_n\}$, *а последовательность положительных чисел* $\{\mu_n\}$ *удовлетворяет условию* (1).

Тогда, если для последовательности комплексных чисел $\{\lambda_n\}$, $|\lambda_n| < 1$, *выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \infty, \tag{8}$$

то система функций $\{z^n F^{(n)}(\lambda_n z)\}$ *полна в пространстве* $L_p(\Gamma;\ \mu)$.

Доказательство. Вспомогательная функция $\varphi(t)$, определяемая равенством (3), удовлетворяет условиям

$$\Phi[z^n F^{(n)}(\lambda_n z)] = \varphi^{(n)}(\lambda_n) = 0.$$

В силу теоремы единственности для аналитических функций, если функция $u(t) \in A_R$ такова, что $u^{(n)}(\lambda_n) = 0$, то из условия $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ и

$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_{n+1}-\lambda_n| < \infty$ следует, что $\varphi(t)\equiv 0$ (см. ([1]), стр. 488). Таким образом, из условия (8) теоремы и из приведенной выше теоремы единственности следует, что $\varphi(t)\equiv 0$. Проведя остальные рассуждения аналогично теореме 1, нетрудно убедиться в справедливости утверждения теоремы.

Теорема 4. *Пусть спрямляемый контур* Γ *целиком расположен в угле* $|\arg z|\leqslant\pi\sigma$, $0\leqslant\sigma\leqslant 1$, *а целая функция* $F(z)\in A_{\infty}^{(p)}(\Gamma;\ \mu)$ *такова, что* $F^{(\mu_n)}(0)\neq 0$, $F^{(\nu_n)}(0)=0$, $n=0, 1, \ldots$, *где* $\{\mu_n\}=\{n\}\setminus\{\nu_n\}$, *причем последовательность положительных чисел* $\{\mu_n\}$ *удовлетворяет условию* (1).

Тогда, если для последовательности комплексных чисел $\{\lambda_n\}$ *выполняется условие*

$$|\lambda_0|\leqslant|\lambda_1|\leqslant\ldots\leqslant|\lambda_n|\leqslant\ldots,\quad \lim|\lambda_n|=\infty$$

и

$$\ln M_p(F;\Gamma;r/\theta)\leqslant C(\theta)\cdot n(r),\quad C(\theta)\leqslant\ln\frac{1-\theta}{\theta},\quad \theta<\theta<{}^1/_2, \tag{9}$$

где $n(r)$ — *число точек последовательности* $\{s_n\}$, $s_n=|\lambda_0|+\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k-\lambda_{k-1}|$, *расположенных в интервале* $(0,\ r)$, *то система функций* $\{z^nF^{(n)}(\lambda_nz)\}$ *полна в пространстве* $L_p(\Gamma;\ \mu)$.

Доказательство. Рассмотрим ту же вспомогательную функцию $\varphi(t)$ и заметим, что $\Phi[z^nF^{(n)}(\lambda_nz)]=\varphi^{(n)}(\lambda_n)=0$. Легко видеть, что для целой функции $\varphi(t)$, согласно неравенству Гёльдера, имеем

$$|\varphi(t)|\leqslant\left\{\int_\Gamma|F(tr)|^p\,d\mu(z)\right\}^{1/p}\cdot\left\{\int_\Gamma|g(z)|^q\,d\mu(z)\right\}^{1/q}.$$

Отсюда, учитывая условие (9), находим

$$\ln M(\varphi;\ r/\theta)\leqslant\ln M_p(F;\ \Gamma;\ r/\theta)\leqslant C(\theta)n(r).$$

В силу теоремы единственности для целых функций, если функция $u(t)$ целая и такова, что $u^{(n)}(\lambda_n)=0$, из условия

$$\ln M(u;\ r/\theta)\leqslant C(\theta)n(r)$$

следует, что $u(t)\equiv 0$ (см. ([1]), стр. 490). Таким образом, в силу приведенной выше теоремы единственности, из условия (9) следует, что $\varphi(t)\equiv 0$. Проведя остальные рассуждения аналогично теореме 2, нетрудно убедиться в справедливости утверждения теоремы.

Институт математики и механики

Институт кибернетики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
19 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. И. Ибрагимов, Методы интерполяции функций и некоторые их применения, «Наука», 1971. [2] И. И. Ибрагимов, И. С. Аршон, ДАН, 208, № 2 (1973). [3] С. Банах, Курс функционального анализа, Киев, 1948. [4] И. И. Ибрагимов, Изв. АН АзербССР, сер. физ.-техн. и матем. наук, № 3 (1969).