Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 2

УДК 517.946 **МАТЕМАТИКА**

В. В. КАТРАХОВ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 17 V 1973)

В заметке изучаются асимптотические свойства спектральной функции некоторых дифференциальных операторов произвольного порядка с сингулярными коэффициентами. Асимптотика собственных значений и собственных функций была рассмотрена в ([1]). Вопросы, связанные с существованием спектральной функции, были изучены ранее ([4]).

1. Пусть. Ω^+ — ограниченная область в полупространстве

$$R_+{}^{n+1}=\{x=(x_1,\ldots,x_{n+1}):\ -\infty<x_i<\infty,\ i=1,\ldots,n,\ x_{n+1}>0\}$$

эвклидова $(n+1)$-мерного пространства, прилегающая к гиперплоскости $\{x_{n+1}=0\}$. Обозначим через Γ часть границы области Ω^+, лежащую на этой гиперплоскости. Рассмотрим в Ω^+ дифференциальный оператор

$$L(x,D)=\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)\,D_{x'}^{\alpha'}B_{x_{n+1}}^{\alpha_{n+1}}+\sum_{|\alpha|<2m+\alpha_{n+1}}\widetilde{a_\alpha(x)}\,D_x^\alpha, \tag{1}$$

где $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1})$, $\alpha'=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n+2\alpha_{n+1}=|\alpha'|+2\alpha_{n+1}$, $x'=(x_1,\ldots,x_n)$, $D_x^\alpha=i^{-|\alpha'|}(\partial/\partial x_1)^{\alpha_1}\ldots(\partial/\partial x_{n+1})^{\alpha_{n+1}}=D_{x'}{}^{\alpha'}(\partial/\partial x_{n+1})^{\alpha_{n+1}}$, $B_{x_{n+1}}=(\partial/\partial x_{n+1})^2+k\partial/(x_{n+1}\partial x_{n+1})$, $k>0$,— оператор Бесселя. Коэффициенты a_α, $\tilde a_\alpha$ оператора (1) предполагаются бесконечно дифференцируемыми в области Ω^+, ограничения на их поведения при $x_{n+1}\to0$ будут сформулированы ниже.

Оператор (1) назовем B-*эллиптическим*, если его символ, т. е. многочлен

$$\hat a(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=2m}a_\alpha(x)\,\xi_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\xi_n^{\alpha_n}\,\xi_{n+1}^{2\alpha_{n+1}},$$

не обращается в нуль при вещественных $\xi\in R^{n+1}$, отличных от нуля. Сформулированное понятие B-эллиптичности несколько расширяет подобное понятие работы ([1]).

Пусть $L_{2,k}(\Omega^+)$ — гильбертово пространство квадратично суммируемых с весом x_{n+1}^k в области Ω^+ функций со скалярным произведением, определяемым формулой

$$(u,v)_k=\int_{\Omega^+}u(x)\cdot\overline{v(x)}\,x_{n+1}^k\,dx.$$

Пусть $C_r{}^s(\Omega^+)$ — пространство s раз непрерывно дифференцируемых в $\Omega^+\cup\Gamma$ функций, четных по последней переменной, и пусть $C_{0,r}^s(\Omega^+)\subset C_r{}^s(\Omega^+)$ — подпространство функций, обращающихся в нуль в окрестности части границы $\partial\Omega\setminus\Gamma$.

Предположим, что оператор L формально самосопряжен, т. е. для любых функций $u,v\in C_{0,r}^\infty(\Omega^+)$

$$(Lu,\ v)_k=(u,\ Lv)_k.$$

Пусть оператор L, рассматриваемый как оператор из пространства $C^{2m}_{0,r}(\Omega^+)$ в $L_{2,k}(\Omega^+)$, обладает полуограниченным самосопряженным расширением A. Не ограничивая общности, можно считать, что оператор A полуограничен снизу. Некоторые условия существования таких расширений приведены в ([4]). Обозначим через $\{E_\lambda\}$ семейство проекционных операторов, образующих спектральное разложение оператора A:

$$A=\int \lambda\, dE_\lambda.$$

Функция $e(\lambda, x, y)$ называется спектральной функцией оператора A, если она является ядром Карлемана для оператора E_λ, т. е.

$$(E_\lambda f)(y)=\int\limits_{\Omega^+} e(\lambda, x, y) f(x) x_{n+1}^k\, dx.$$

Существование функции $e(\lambda, x, y)$ для таких операторов было фактически доказано в ([4]). В самом деле имеет место элементарная

Лемма 1. *Пусть s — натуральное число и $-\infty<t<\infty$, тогда существуют вполне определенные числа $C_{l,\sigma,\alpha}$ такие, что*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s=\sum_{\substack{l+\sigma+2\alpha=s\\ \sigma\leqslant 1,\sigma+\alpha>0}} \frac{C_{l,\sigma,\alpha}}{t^l}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\sigma B_t^\alpha.$$

Предположим, что функции $x_{n+1}^{-l}(\partial/\partial x_{n+1})^s a_\alpha(x)$ ограничены при $s\geqslant 1$, $l+s<0$. Тогда мы оказываемся в условиях работы ([4]), и, следовательно, существование спектральной функции установлено.

Пусть z — точка из $\Omega^+\cup\Gamma$. Рассмотрим оператор L^z, получающийся из L сохранением старших членов и замораживанием коэффициентов $a_\alpha(x)$ в точке z. Определим преобразование Фурье — Бесселя формулой

$$(F_B f)(\xi)=F_B f(\xi)=\int\limits_{R^{n+1}_+} e^{-i(x',\xi')} j_{(k-1)/2}(x_{n+1}\xi_{n+1}) f(x) x_{n+1}^k dx.$$

Оператор L^z, действующий из пространства $C^{2m}_{0,r}(\Omega^+)$ в $L_{2,k}(\Omega^+)$, обладает самосопряженным замыканием $\overline{L^z}$, определяемым формулой

$$\overline{L^z}=F_B^{-1}\hat{a}(z,\ \cdot)\ F_B,$$

где $\hat{a}(z,\ \cdot)$ — оператор умножения на функцию $\hat{a}(z,\ \cdot)$.

Легко показать, что проекционный оператор E_λ^z спектрального разложения оператора $\overline{L^z}$ можно определить по формуле

$$(E_\lambda^z f)(y)=\frac{1}{(2\pi)^n 2^{2\nu+1}\Gamma^2(\nu+1)}\int\limits_{\hat{a}(z,\xi)<\lambda} F_B f(\xi) e^{i(y',\xi')} j_\nu(x_{n+1}\xi_{n+1}) |\xi_{n+1}|^k d\xi,$$

где $\nu=(k-1)/2$.

Обозначим, через $e^z(\lambda, x, y)$ ядро Карлемана оператора E_λ^z, тогда

$$e^z(\lambda, x, y)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n 2^{2\nu+1}\Gamma^2(\nu+1)}\int\limits_{\hat{a}(z,\xi)<\lambda} e^{-i(x'-y',\xi')} j_\nu(x_{n+1}\xi_{n+1}) j_\nu(y_{n+1}\xi_{n+1}) |\xi_{n+1}|^k d\xi.$$

Отсюда непосредственно следует, что при $x=y\in\{x_{n+1}=0\}$

$$e^z(\lambda, x, x)=\frac{\lambda^{(n+k+1)/(2m)}}{(2\pi)^n 2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1)}\int\limits_{\hat{a}(z,\xi)<1} |\xi_{n+1}|^k d\xi.$$

Если теперь сдвинуться с гиперплоскости $\{x_{n+1}=0\}$, то имеют место обычные оценки спектральной функции (2), например,

Теорема 1. *При* $\lambda\to\infty$

$$e(\lambda, x, y)=e^x(\lambda, x, y)+o(\lambda^{(n+k+1)/(2m)}) \tag{2}$$

равномерно на компактных подмножествах множества $(\Omega^+\cup\Gamma)\times(\Omega^+\cup\Gamma)$ *и*

$$e(\lambda, x, y)=e^x(\lambda, x, y)+o(\lambda^{(n+1)/(2m)}) \tag{3}$$

равномерно на компактных подмножествах множества $\Omega^+\times\Omega^+$.

2. Пусть теперь B-эллиптический оператор (1) имеет вид

$$L=L(D_{x'}', B_{x_{n+1}})=\sum_{|\alpha|\leqslant 2m} a_\alpha D_{x'}^{\alpha'} B_{x_{n+1}}^{\alpha_{n+1}}, \tag{4}$$

где a_α — постоянные коэффициенты. Оказывается, что в этом случае оценки (2) и (3) можно уточнить. В самом деле, в этом случае L, как оператор из пространства $C_{0,\gamma}^{2m}(R_+^{n+1})$ в $L_{2,k}(R_+^{n+1})$, имеет самосопряженное замыкание A_0, определяемое формулой

$$A_0=F_B^{-1}a(\cdot)F_B,$$

где $a(\cdot)$ — оператор умножения на многочлен $a(\xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant 2m} a_\alpha \xi'^{\alpha'}\xi_{n+1}^{2\alpha_{n+1}}$.

Спектральная функция e_0 оператора A_0 имеет вид

$$e_0(\lambda, x, y)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n 2^{2\nu+1}\Gamma^2(\nu+1)}\int\limits_{a(\xi)<\lambda} e^{-i(x'-y',\xi')} j_\nu(x_{n+1}\xi_{n+1}) j_\nu(y_{n+1}\xi_{n+1})\,|\xi_{n+1}|^k d\xi;$$

обозначим через $\sigma^s(\lambda)$ риссовское среднее функции ограниченной вариации $\sigma(\lambda)$,

$$\sigma^{(s)}(\lambda)=\Gamma(s)^{-1}\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}(\lambda-\mu)^{s-1}(\lambda-\lambda_0)^{1-s}d\sigma(\mu).$$

В следующей теореме прослежена асимптотика спектральной функции вплоть до части границы области Ω^+, лежащей на гиперплоскости $\{x_{n+1}=0\}$. На этой гиперплоскости коэффициенты оператора (4) обращаются в бесконечности и поэтому оценки спектральной функции ухудшаются по сравнению с оценками внутри области, в последнем случае наши оценки совпадают с уже известными ([2], [3]).

Теорема 2. *Пусть B-эллиптический оператор L имеет вид* (4) *и* λ_0 *меньше нижней грани операторов A и A_0, тогда для* $s\geqslant 1$

$$e^{(s)}(\lambda, x, y)=e_0^{(s)}(\lambda, x, y)+O(\lambda^{(n+k+1-s)/(2m)})$$

равномерно на компактных подмножествах множества $(\Omega^+\cup\Gamma)\times(\Omega^+\cup\Gamma)$.

Внутри области имеет место оценка

$$e^{(s)}(\lambda, x, y)=e_0^{(s)}(\lambda, x, y)+O(\lambda^{(n+1-s)/(2m)})$$

равномерно на компактных подмножествах множества $\Omega^+\times\Omega^+$.

Доказательство теоремы 2 основано на следующих утверждениях. Рассмотрим эрмитову форму ($t>0$)

$$(e^{-tA_0}f\ g)_k = \int\limits_{R_+^{n+1}} e^{-ta(\xi)} F_B f(\xi) \overline{F_B g(\xi)}\, \xi_{n+1}^k d\xi.$$

Ядром этой формы служит функция

$$u_0(t,x,y) = (2\pi)^{-n} 2^{-2\nu} \Gamma^{-2}(\nu+1) \int\limits_{R_+^{n+1}} e^{-ta(\xi)-i(x'-y',\xi')} j_\nu(x_{n+1}\xi_{n+1}) \times$$

$$\times j_\nu(y_{n+1}\xi_{n+1})\, \xi_{n+1}^k d\xi = \int e^{-t\lambda} d_\lambda e_0(\lambda,x,y).$$

Имеет место следующая

Лемма 2. *Функция* $u_0 \in C_0^\infty(R_+^1 \times \overline{R_+^{n+1}} \times \overline{R_+^{n+1}})$. *Если* $f \in C_0^\infty \times (R_+^1 \times \overline{R_+^{n+1}})$, *то функция*

$$\mathscr{E}(t,x) = \int\limits_t^\infty d\tau \int\limits_{R_+^{n+1}} u_0(t-\tau,y,x) f(\tau,y)\, y_{n+1}^k dy$$

принадлежит классу $C^\infty(\overline{R^1_+} \times \overline{R_+^{n+1}})$ *и удовлетворяет уравнению*

$$\left(L - \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathscr{E}(t,x) = f(t,x).$$

Следующая лемма дает оценку функции $u_0(t,x,y)$.

Лемма 3. *Существует число* c, *зависящее только от оператора* L, *такое, что для* $t<1$

$$|D_{x'}^{\alpha'} B_{x_{n+1}}^{\alpha_{n+1}} u_0(t,x,y)| \leqslant C_\alpha t^{-(|\alpha|+n+1)/(2m)} \exp[-c(|x-y|\, t^{-1/2m})^{2m/(2m-1)}]$$

для всех x *и* y.

С помощью леммы 2 и леммы 3 доказывается

Лемма 4. *Существует постоянная* $c_1>0$ *такая, что*

$$u(t,x,y) - u_0(t,x,y) = O[\exp(-ct^{-1/(2m-1)})]$$

равномерно на компактных подмножествах множества $(\Omega^+ \cup \Gamma) \times (\Omega^+ \cup \Gamma)$ *при* $t<1$; *здесь* $u(t,x,y)$ — *ядро эрмитовой формы* $(e^{-tA}f, g)_k$.

Для доказательства теоремы 2 нужно теперь применить тауберову теорему ([2]).

В заключение автор выражает глубокую благодарность И. А. Киприянову за руководство работой, а также М. И. Ключанцеву за полезные обсуждения.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
16 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. А. Киприянов, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 117 (1972). [2] Л. Гординг, Сборн. пер. Математика, 1, 3 (1957). [3] Л. Хермандер, там же, 13, 6 (1969). [4] В. В. Катрахов, ДАН, 207, № 2 (1972).