

С. Е. КУЗНЕЦОВ

О РАЗЛОЖЕНИИ ЭКСЦЕССИВНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком Ю. В. Прохоровым 23 III 1973)

1. С каждой марковской переходной функцией связан класс эксцессивных функций, являющихся естественным обобщением неотрицательных супергармонических функций классического анализа. Р. Мартин ⁽¹⁾ показал, что всякая неотрицательная супергармоническая функция однозначно разлагается по крайним. Справедливость аналогичного результата для эксцессивных функций была доказана Дубом ⁽²⁾ в случае марковских цепей со счетным множеством состояний, Кунита и Ватанабе ⁽³⁾ и Е. Б. Дынкиным ⁽⁴⁾ — для некоторых классов однородных переходных функций. Новый подход был предложен недавно Е. Б. Дынкиным ⁽⁵⁻⁷⁾; доказанная им теорема о крайних точках семейства мер, обладающих общим условным распределением, позволила получить разложение Мартина, не строя границы Мартина. Упрощение теории получилось также благодаря отказу от требования однородности переходной функции и рассматриваемых эксцессивных функций. (Однородный случай в дальнейшем сводится к неоднородному.) Опираясь на результаты ^(6, 7), мы покажем, что для существования разложения Мартина необходимо и достаточно, чтобы переходная функция была абсолютно непрерывна относительно нормирующей эксцессивной функции меры ν . В однородном случае удастся получить новые достаточные условия.

2. Будем пользоваться терминологией и обозначениями ⁽⁶⁾. Пусть $p(s, x, t, \Gamma)$ — переходная функция в стандартном измеримом пространстве $(E, \mathcal{B})$, P_t^s — отвечающие ей линейные операторы на функциях и мерах. Неотрицательная функция $h^s(x)$, $x \in E$, $s \in T = (-\infty, +\infty)$, называется эксцессивной, если $P_t^s h^s(x) \uparrow h^s(x)$ при $t \downarrow s$. Аналогично определяются эксцессивные меры $\nu_t(\Gamma)$, $t \in T$, $\Gamma \in \mathcal{B}$. Если $h^s(x)$ — эксцессивная функция, $\nu_t(\Gamma)$ — эксцессивная мера и $\nu_s\{h^s(x) = \infty\} = 0$, то существует и притом единственная мера P_ν^h на множестве Ω всех траекторий такая, что

$$P_\nu^h\{x_s \in dx, x_t \in dy\} = \nu_s(dx) p(s, x; t, dy) h^t(y)$$

(см. ⁽⁸⁾). Билинейная форма $P_\nu^h(\Omega) = \{\nu, h\}$ может быть выражена (см. ⁽⁶⁾, формула (1.3)) как супремум некоторых конечных сумм, строящихся по p , ν и h . Фиксируем p и ν и обозначим через $\mathcal{P}^\nu$ множество всех эксцессивных функций h , удовлетворяющих условию $\{\nu, h\} = 1$.

Переходную функцию $p(s, x; t, \Gamma) = p(t-s, x, \Gamma)$, зависящую только от разности $t-s$, будем называть однородной. Будем предполагать, что $p(t, x, \Gamma)$ измерима по совокупности t и x . Однородной переходной функции соответствуют операторы $P_{t-s} = P_t^s$ и операторы $G_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t dt$, $\lambda > 0$.

Эксцессивные меры и функции, не зависящие от t , будем также называть однородными. Пусть γ — конечная мера на E и h — однородная эксцессивная функция. Положим $h \in \mathcal{R}^\gamma$, если

$$\gamma(h) = \int h(x) \gamma(dx) = 1.$$

Введем в $\mathcal{P}^v$ какую-нибудь измеримую структуру, для которой все функции $F(h, x) = h^s(x)$ измеримы по совокупности h и x (такую измеримую структуру мы назовем допустимой). Каждой вероятностной мере μ на $\mathcal{P}^v$ отвечает функция $h_\mu \in \mathcal{P}^v$, определенная формулой $h_\mu^s(x) = \int h^s(x) \mu(dh)$ — центр тяжести распределения μ . Аналогичным образом можно ввести центр тяжести и в множестве $\mathcal{R}^v$ при условии, что измеримая структура в $\mathcal{R}^v$ допустима, т. е. функция $F(h, x) = h(x)$ измерима по совокупности h и x .

Для удобства дальнейшего изложения введем следующие определения (ср. ⁽⁶⁾, п. 1.6). Пусть $(Z, \mathcal{F})$ — измеримое пространство, и пусть каждой вероятностной мере μ поставлен в соответствие элемент $z_\mu \in Z$. Точку z назовем крайней, если $z_\mu \neq z$ для меры μ , не сосредоточенной в точке z . Множество всех крайних точек обозначим через Z_e . Будем говорить, что Z — симплекс, если множество Z_e измеримо и каждая точка $z \in Z$ представляется и притом единственным образом в виде центра тяжести вероятностной меры μ , сосредоточенной на множестве крайних точек Z_e .

3. Введем следующее

Условие А. Если $v_r(\Gamma) = 0$, то $p(s, x; t, \Gamma) = 0$ для всех $s < t$, $x \in E$.

В неоднородном случае основные результаты работы можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1. При условии А в $\mathcal{P}^v$ можно ввести допустимую измеримую структуру такую, что $\mathcal{P}^v$ — симплекс.

Теорема 2. Если условие А не выполнено, то $\mathcal{P}^v$ не является симплексом. Точнее, если $\mathcal{P}^v$ непусто, то, какова бы ни была допустимая измеримая структура в $\mathcal{P}^v$, найдется функция $h \in \mathcal{P}^v$, которая не может быть представлена в виде центра тяжести вероятностной меры μ , сосредоточенной на $\mathcal{P}_e^v$.

В однородном случае нам понадобятся

Условие В. Если $\gamma G_\lambda(\Gamma) = 0$, то $p(t, x, \Gamma) = 0$ при всех t, x .

Условие В'. Если $\gamma G_\lambda(\Gamma) = 0$, то $g_\lambda(x, \Gamma) = 0$ при всех x .

Теорема 3. Условие В достаточно, а условие В' необходимо для того, чтобы $\mathcal{R}^v$ являлось симплексом относительно какой-нибудь допустимой измеримой структуры.

4. Доказательство теоремы 1. Введем в $\mathcal{P}^v$ измеримую структуру, порожденную функциями $F(h) = v_s(h^s, \Gamma) *$ (ее допустимость доказана при условии А в ⁽⁶⁾, лемма 4.2). Согласно ⁽⁶⁾, лемма 4.1, существует измеримая по совокупности x и y функция $\pi(s, x; t, y)$ такая, что $p(s, x; t, dy) = \pi(s, x; t, y) v_t(dy)$. Применив к плотности $\pi(s, x; t, y)$ рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 2 работы ⁽⁷⁾, можно модифицировать эту плотность так, чтобы при всех $s < t < u$, $x, z \in E$ выполнялось соотношение

$$\int_E \pi(s, x; t, y) v_t(dy) \pi(t, y; u, z) = \pi(s, x; u, z).$$

Стало быть, $p(s, x; t, dy)$, $v_t(dy)$ и $\hat{p}(t, y; s, dx) = v_s(dx) \pi(s, x; t, y)$ удовлетворяют условиям 1.8. А—1.8. В работы ⁽⁶⁾. Справедливость теоремы 1 вытекает из результатов ⁽⁶⁾, § 4.

5. Доказательство теоремы 2. Предположим, что все функции $h \in \mathcal{P}^v$ разлагаются по крайним точкам. Рассмотрим также $r \in T$ и $\Gamma \in \mathcal{R}$, что $v_r(\Gamma) = 0$, а $p(s, x; r, \Gamma) \neq 0$. Положим $h \in J^r$, если $h^s(x) = 0$ при $s \geq r$; $P_s h^s(x) = h^s(x)$ при $s < t < r$. Легко проверить, что $\bar{h}^s(x) = p(s, x; r, \Gamma) \in J^r$ и $\{v, \bar{h}\} = 0$. Если $h \in \mathcal{P}^{v, r} = \mathcal{P}^v \cap J^r$, то $h + \lambda \bar{h} \in \mathcal{P}^{v, r}$. Нетрудно проверить, что если функция $h \in \mathcal{P}^{v, r}$ — центр тяжести μ , то μ сосредоточена на $\mathcal{P}^{v, r}$.

* Если μ — мера и f — измеримая функция, то μf или $\mu(f)$ означает интеграл функции f относительно меры μ по всему пространству, а $\mu(f, \Gamma)$ — интеграл по множеству Γ .

Положим $\varphi^u(x) = \text{sign } \bar{h}^u(x)$. Можно показать, что при $h \in \mathcal{F}^{v, r}$ функции $P_u^s(h^u \varphi^u)(x)$ убывают по u и имеют своим пределом при $u \uparrow r$ функцию $f^s(x)$ (зависящую от h). Проверяется, что $0 \leq f \leq h$, $f \in J^r$ и $\{v, f\} = 0$. Стало быть, $h_1 = h - f$ и $h_2 = h + f$ принадлежат $\mathcal{F}^{v, r}$. Из равенства $h = 1/2(h_1 + h_2)$ нетрудно усмотреть, что $f = 0$, если h — крайняя точка. Отсюда ясно, что для функций $h \in \mathcal{F}^{v, r}$, которые разлагаются по крайним точкам, $P_u^s(h^u \varphi^u) \rightarrow 0$ при $u \uparrow r$. Это условие не выполнено для всех функций $h + \lambda \bar{h}$, где $h \in \mathcal{F}^{v, r}$, $\lambda > 0$.

6. Доказательство теоремы 3. а) Согласно ⁽⁶⁾, формула (1.8), $\gamma(h) = \{v, h\}$, где v — эксцессивная мера, определенная формулой

$$v_t(\Gamma) = 1/2 \int_{-\infty}^t e^{-|s|} \gamma P_{t-s}(\Gamma) ds.$$

В силу В для v выполняется условие А. Достаточность В выводится теперь из теоремы 1 с помощью рассуждений п. 1.7 работы ⁽⁶⁾.

б) Пусть условие В' не выполнено. Тогда для некоторого Γ $\gamma G_\lambda(\Gamma) = 0$, а множество $E_0\{x: g_\lambda(x, \Gamma) \neq 0\}$ непусто. Из уравнения

$$g_\lambda(x, \Gamma) - g_\mu(x, \Gamma) = (\mu - \lambda) \int_{E_0} g_\lambda(x, dy) g_\mu(y, \Gamma)$$

вытекает, что $g_\lambda(x, E_0) = 0$ при $x \notin E_0$ и $g_\lambda(x, E_0) > 0$ при $x \in E_0$. Положим $\bar{h} = 1$ на E_0 и 0 вне E_0 . При $x \notin E_0$

$$\lambda G_\lambda \bar{h}(x) = \bar{h}(x) = 0.$$

При $x \in E_0$

$$\lambda G_\lambda \bar{h}(x) \leq \lambda G_\lambda 1(x) \leq \bar{h}(x).$$

Согласно ⁽⁶⁾, лемма 5.1, $\lambda G_\lambda \bar{h}(x) \uparrow \bar{h}(x)$, где $\bar{h}$ — эксцессивная функция. Легко проверить, что $\bar{h} > 0$ на E_0 и $\bar{h} = 0$ вне E_0 . Поскольку $\gamma(E_0) = 0$, то $\gamma(\bar{h}) = 0$. Поэтому множество $\mathcal{R}^v$ содержит вместе с каждой точкой h весь луч $h + \lambda \bar{h}$, $\lambda > 0$. Нетрудно проверить, что этим свойством не может обладать симплекс.

Автор благодарен Е. Б. Дынкину за ценные указания.

Центральный экономико-математический институт
Академии наук СССР
Москва

Поступило
19 III 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ R. S. Martin, Trans. Am. Math. Soc., 49, 137 (1941). ² J. L. Doob, J. Math. and Mech., 8, 433 (1959). ³ H. Kunita, T. Watanabe, Bull. Am. Math. Soc., 69, 386 (1963). ⁴ Е. Б. Дынкин, УМН, 24, 4 (148) (1969). ⁵ Е. Б. Дынкин, УМН, 26, 4 (160) (1971). ⁶ Е. Б. Дынкин, УМН, 27, 1 (163) (1972). ⁷ Е. Б. Дынкин, С. Е. Кузнецов, ДАН, 214, № 1 (1974). ⁸ С. Е. Кузнецов, Теория вероятн. и ее примен., № 3 (1973).