

УДК 517.948.33

МАТЕМАТИКА

Г. М. МАГОМЕДОВ

НЕЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К НЕЛИНЕЙНОМУ СИНГУЛЯРНОМУ ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 14 II 1973)

Пусть B_1, B_2, B_3 — банаховы пространства и оператор $\Phi(x, y)$ действует из $B_1 \times B_2$ в B_3 .

В данной заметке даны условия существования решения уравнения

$$\Phi(x, y) = 0 \quad (a)$$

в B_2 при любом фиксированном $x \in B_1$.

Из основного утверждения вытекают теоремы существования и единственности решений уравнений типа

$$u(x) = (S_k v)(x), \quad S_k v = \int_a^b \frac{F[s, u, (s)]}{s-x} ds, \quad x \in (a, b), \quad (b_k)$$

где $a = -\infty, b = \infty$, когда $k=1$, и a, b конечны, когда $k=2$.

Дается самостоятельная теорема единственности решений уравнений

$$u = \lambda S_2 u \quad (c)$$

при любом действительном λ .

Сначала сформулируем частную теорему.

Теорема 1. Если $B_1 = B_2 = E = (-\infty, \infty)$ и непрерывный в $B_1 \times E$ функционал $\Phi(x, v)$ при каждом фиксированном $x \in B_1$ имеет непрерывную в E производную $\Phi'_v(x, y)$, удовлетворяющую условиям

$$|\Phi'_v(x, y)| \geq A_x \Phi(|y|) > 0, \quad \int_M^\infty \Phi(\sigma) d\sigma = \infty, \quad (1)$$

при любом $0 \leq M$, то существует единственный непрерывный функционал $F(x) (B_1 \rightarrow E)$, который удовлетворяет

$$\Phi(x, F(x)) = 0 \quad (2)$$

во всем B_1 .

Доказательство почти очевидно.

Замечание 1. Можно построить примеры функционалов $\Phi(x, y)$, не удовлетворяющих условию (1), но удовлетворяющих другим условиям теоремы, для которых не существует искомого $F(x)$. В этом смысле условие (1) является необходимым в теореме.

Лемма 1. Если последовательности положительных чисел $\{a_n\}, \{b_n\}$ удовлетворяют условиям

$$A_0 \exp \{-\varphi_n\} \leq a_{n+1} - a_n \leq A A_0 \exp \{-\varphi_{n+1}\}, \quad (3)$$

$$b_{n+1} - b_n \geq A_0 \exp \{-\varphi_n\} \Psi_n^{-1}, \quad (4)$$

где

$$\Psi_n = \Psi(a_n) = a_n (\ln a_n) \times (\ln \ln a_n) \times \dots \times \underbrace{(\ln \ln \dots \ln a_n)}_p;$$

$$\varphi_n = \exp \{ \underbrace{\exp [\dots \exp (a_n)]}_q \}.$$

$0 \leq p, \leq q$ целые; $0 < A_0, 0 < A$ произвольное, a_0 — достаточно большое по сравнению с A , то последовательность $\{b_n\}$ неограничена.

Доказательство заключается в обосновании неравенства

$$b_{n+1} - b_n \geq B \{ (C_0 n + D_0)^{-\gamma_0/(1-\gamma_0)} \cdot \Psi [(C_0 n + D_0)^{1/(1-\gamma_0)}] \times \dots \\ \dots \times \underbrace{[\ln \dots \ln (C_0 n + D_0)^{1/(1-\gamma_0)}]}_{p+q+2} \}^{-1},$$

где $B, C_0, D_0, 0 < \gamma_0 < 1$ — некоторые постоянные.

Вышеупомянутая лемма и локальная теорема о неявной функции существенно используются для доказательства основной теоремы.

Теорема 2. Пусть оператор $\Phi(x, y)$ непрерывен в $B_1 \times B_2$ и в каждой точке $B_1 \times B_2$ существует линейный оператор $\Phi'_y(x, y) [B_2 \rightarrow B_3]$ — производная Фреше и обратный оператор, удовлетворяющий условиям:

$$1) \quad \| [\Phi'_y(x, y)]^{-1} \{ [\Phi'_y(x_1, y_1) - \Phi'_y(x, y)](h) \} \| \leq [\gamma_1(\|x\|, \|y\|)] \times \\ \times (\|x_1 - x\|^\alpha + \|y_1 - y\|^\alpha) \|h\|, \quad 0 < \alpha;$$

$$2) \quad \| [\Phi'_y(x, y)] [\Phi(x_1, y) - \Phi(x, y)] \| \leq [\gamma_2(\|x\|, \|y\|)] \|x_1 - x\|, \\ \|x_1 - x\| \leq 1, \quad \|y_1 - y\| \leq 1,$$

где нормы понимаются каждый в соответствующем виде; $\gamma_1(s, \sigma) \leq \varphi(A_1 + B_1 s + C_1 \sigma)$, $\gamma_2(s, \sigma) \leq \gamma_3(s) \Psi(A_2 + C_2 \sigma)$; $\gamma_3(s) \uparrow$, A_i, B_i, C_i — произвольные положительные постоянные;

3) существует точка $(x_0, y_0) \in B_1 \times B_2$, являющаяся решением уравнения (а).

Тогда при любом фиксированном $x \in B_1$ уравнение (а) имеет решение $y \in B_2$, единственное в некотором шаре с центром в этой точке y , и это решение можно найти, применяя конечное число раз принцип сжатых отображений; более того, существует единственный непрерывный оператор $f(x) [B_1 \rightarrow B_2]$, чтобы $y_0 = f(x_0)$ и $\Phi[x, f(x)] = 0$ во всем B_1 .

Если в точке $x = x_0$ уравнение (а) имеет множество $\{y_{0, \alpha}\}$ решений, то существует эквивалентное множество операторов $\{f_\alpha(x) (B_1 \rightarrow B_2)\}$, чтобы $y_{0, \alpha} = f_\alpha(x_0)$ и $\Phi[x, f(x)] = 0$ во всем B_1 и $f_\alpha(x) \neq f_\beta(x)$ в любой точке B_1 , если $\alpha \neq \beta$.

Замечание 2. Из замечания 1 следует, что условия, налагаемые на $\Psi(\sigma)$, являются почти необходимыми в целом.

Теорема 3. Если непрерывный оператор Au , действующий в B , имеет в каждой точке $u \in B$ производную Фреше $(A'u)(h)$, обратный оператор $[(A'u)(h) - h]^{-1} u$

$$\| (A'u_2 - A'u_1)(h) \| \leq \gamma_1(0, \|u\|) \|h\|, \quad \| [A'u - I]^{-1}(g) \| \leq \gamma_2(0, \|u\|) \|g\|,$$

то уравнение

$$u = \lambda Au$$

имеет решение в B при любом действительном λ и u оператора Au нет точек ветвления.

Для доказательства нужно фиксировать λ и к уравнению

$$\Phi(v, u) = v - u + \lambda Au = 0$$

применить теорему 2.

Обозначим $H_\alpha [H_\alpha(\infty)]$ пространство с нормой

$$\|u\| = \|u\|_c + \sup_{\alpha \leq x_1, x_2 \leq b} \frac{|u(x_2) - u(x_1)|}{|x_2 - x_1|^\alpha} \times \\ \times \left[\sup_{-\infty < x_1, x_2 < \infty} \frac{|u(x_2) - u(x_1)| \sqrt{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}}{|x_2 - x_1|^\alpha} \right].$$

Теорема 4. Если функция $f(x, u)$ и ее частная производная $f'_v(x, v)$ определены на $[a, b] \times (-\infty, \infty)$, действуют в $H_\alpha[H_\alpha(\infty)]$, и, кроме того,

$$1) \|f'_v[x, v_1(x)] - f'_v[x, v(x)]\| \leq \gamma_1(0, \|u\|) \|v_1 - v\|^p, \quad 0 < \beta, \quad \|v_1 - v\| \leq 1;$$

2) $|f_v(x, v)|^{-1} \leq \gamma_2(0, |v|)$; $|\{[f_v(x, v)]^{-1}\}'_v| \leq [\gamma_2(0, |v|)] / (A_2 + C_2|v|)$ при каком-либо p, q , то при $F(x, v) \equiv f(x, v)$ уравнение (b_1) имеет единственное решение в $H_\alpha(-\infty)$ при любом фиксированном $u \in H_\alpha(\infty)$.

Если

$$F(x, v) \equiv (b-x)^{1/2+\alpha} (x-a)^{-1/2+\alpha} f(x, v), \quad v(x) = [(b-x)/(x-a)]^{1/2} v^0(x), \\ v^0(a) = v^0(b) = 0, \quad v^0(x) \in H_\alpha,$$

то уравнение (b_2) имеет единственное решение в H_α при $0 < \alpha < 1/2$, а если

$$F(x, v) \equiv [(b-x)(x-a)]^{-1/2+\alpha} f(s, u), \quad v(x) \equiv [(b-x)(x-a)]^{-1/2} v^0(x),$$

то уравнение (b_2) имеет единственное однопараметрическое семейство решений из H_α при $0 < \alpha < 1/2$.

Для доказательства теоремы сначала применяем соответствующую формулу обращения, которое можно определить из $(^2)$, а потом теорему 2.

Теорема 5. Если функция $F(x, u)$ непрерывна в $[a, b] \times (-\infty, \infty)$ и $F(a, u) \equiv F(b, u) \equiv 0$, то при любом действительном фиксированном λ уравнение (c) имеет не более одного непрерывного решения, а если, кроме того, $F(x, u)$ действует в L_p , $1 < p$, то решение будет единственным во всем L_p .

Доказательство теоремы основывается на методах работы $(^3)$ и с другими результатами этой заметки не связано.

Дагестанский государственный университет
им. В. И. Ленина
Махачкала

Поступило
31 I 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959. ² Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968. ³ И. Б. Симоненко, Изв. АН СССР, сер. матем., 26, № 2 (1964).