Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 5

УДК 517.948 *МАТЕМАТИКА*

Академик АН УССР Ю. А. МИТРОПОЛЬСКИЙ, П. Ф. ФИЛЬЧАКОВ

О РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ ПРИ ПОМОЩИ РЯДОВ

Как известно, перспективным методом решения уравнений с отклоняющимся аргументом является метод шагов, сводящий рассматриваемую задачу к решению аналогичной задачи для последовательности обыкновенных дифференциальных уравнений ([1], [2]). Последнюю задачу можно эффективно решить при помощи рядов, если ввести соответствующие обозначения и воспользоваться формулой Коши.

Будем коэффициенты ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (t-t_0)^n = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} A_n (t-t_0)^n\right\} \cdot \left\{\sum_{n=0}^{\infty} B_n (t-t_0)^n\right\}, \tag{1}$$

равного произведению двух степенных рядов, обозначать символом $C_n=[A_nB_n]$, числовое значение которого определяется по формуле Коши

$$[A_nB_n]=\sum_{j=0}^{n} A_jB_{n-j}=A_0B_n+A_1B_{n-1}+\ldots+A_nB_0, \quad n=0,1,2,\ldots \tag{2}$$

Далее, обозначим k-ю степень ряда $x=\sum a_n(t-t_0)^n$ соответственно

$$x^k=\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} (t-t_0)^n, \quad k=1,2,3,\ldots \tag{3}$$

При $k=1$ имеем $a_n^{(k)}=a_n$. При $k=l+m$ введенные коэффициенты $a_n^{(k)}$ вычисляем по формуле (2), положив в ней $A_n=a_n^{(l)}$, $B_n=a_n^{(m)}$:

$$a_n^{(l+m)}=[a_n^{(l)} a_n^{(m)}]=\sum_{j=0}^{n} a_j^{(l)} a_{n-j}^{(m)}, \quad l, m=1,2,3,\ldots \tag{4}$$

Для удобства выкладок представим производные x', x'', x''', ... в виде таких рядов:

$$x'=\sum_{n=0}^{\infty} \dot{a}_{n+1}(t-t_0)^n, \quad x''=\sum_{n=0}^{\infty} \ddot{a}_{n+2}(t-t_0)^n, \ldots, \tag{5}$$

где введены обозначения

$$\dot{a}_{n+1}=(n+1)a_{n+1}, \quad \ddot{a}_{n+2}=(n+1)(n+2)a_{n+2}, \quad \dddot{a}_{n+3}=(n+1)(n+2)(n+3)a_{n+3}, \ldots \tag{6}$$

В таком случае и все степени от производных x', x'', x''', ... легко выразить рядами:

$$(x')^k=\sum_{n=0}^{\infty} \dot{a}_{n+1}^{(k)}(t-t_0)^n, \quad (x'')^k=\sum_{n=0}^{\infty} \ddot{a}_{n+2}^{(k)}(t-t_0)^n, \ldots, \tag{7}$$

коэффициенты которых $\dot{a}_{n+1}^{(k)}$, $\ddot{a}_{n+2}^{(k)}$, $\dddot{a}_{n+3}^{(k)}$, ... определим по формуле (4), заменив a_n соответственно на $\dot{a}_{n+1}$, $\ddot{a}_{n+2}$, $\dddot{a}_{n+3}$, ...

Введенные обозначения позволяют находить в комплексной области общее решение для широкого класса нелинейных (и линейных) дифференциальных уравнений и, что особенно важно, выявлять при помощи аналитического продолжения особые точки этого решения, определяя тем самым радиус сходимости полученных рядов ([3]). Дальнейшее изложение проведем на примерах, которые носят вполне общий характер.

Пример 1. Решить на сегменте $0 \leqslant t \leqslant 3$ задачу Коши для нелинейного уравнения с постоянным запаздыванием

$$x''(t) = -\omega_0^2 x(t) + \varepsilon[-2rx'(t) + \lambda x^3(t-1) - x^5(t-1)], \quad x(0)=1, \quad x'(0)=0 \quad (8)$$

при $\omega_0^2=3$, $\varepsilon=0{,}2$, $r=1$, $\lambda=2$ и начальной функции $\varphi(t)=1$, $-1 \leqslant t \leqslant 0$.

Решение. Представив искомую функцию от аргументов t и $(t-1)$ рядами

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n, \quad x(t-1) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (t-t_0)^n, \quad (9)$$

подставляем затем ряды (5) и (3) при $k=1$; 3; 5 в исходное уравнение и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $(t-t_0)$, получаем рекуррентную формулу для определения искомых коэффициентов a_n:

$$\ddot{a}_{n+2} = -\omega_0^2 a_n - 2\varepsilon r \dot{a}_{n+1} + \varepsilon\lambda b_n^{(3)} - \varepsilon b_n^{(5)}, \quad \dot{a}_{n+2} = \frac{\ddot{a}_{n+2}}{n+1}, \quad a_{n+2} = \frac{\dot{a}_{n+2}}{n+2}. \quad (10)$$

В первом шаге, т. е. на сегменте $[0; 1]$, коэффициенты $b_n \equiv b_n^{\mathrm{I}}$ известны, поскольку они равны коэффициентам Тейлора начальной функции $\varphi(t) \equiv x(t-1) = \sum b_n (t-t_0)^n$. В данном примере $\varphi(t)=1=\mathrm{const}$ и, следовательно, $b_0=1$, $b_n=0$ при $n \geqslant 1$. Поэтому подставив в (10) при $n=0$ заданные $a_0=x(0)=1$, $\dot{a}_1=x'(0)=0$, $b_0^{(3)}=b_0^{(5)}=1$, находим последовательно $\ddot{a}_2=-2{,}8$; $\dot{a}_2=-2{,}8$; $a_2=-1{,}4$. Аналогично при $n=1$, по известным $a_1=\dot{a}_1==0$; $\dot{a}_2=-2{,}8$; $b_1^{(3)}=b_1^{(5)}=0$ определяем $\ddot{a}_3=1{,}12$; $\dot{a}_3={}^1/_2\ddot{a}_3=0{,}56$; $a_3={}^1/_3\dot{a}_3==0{,}186666667$ и, продолжая этот процесс, можем вычислить любое количество коэффициентов a_n. В табл. 1 приведены результаты всех вычислений, необходимых для определения a_n с девятью десятичными знаками. В последней строке табл. 1 вычислены (при $t-t_0=1$) суммы $x(1)=\sum_{n=0}^{16} a_n==0{,}040561421$; $x'(1)=\sum_{n=0} \dot{a}_{n+1}=-1{,}317561069$, являющиеся начальными

Таблица 1

Ряд I: $t_0 \equiv t_0^{\mathrm{I}}=0$; $0 \leqslant t \leqslant 1$

$[\mu]=\mathrm{I}$		$\varepsilon\lambda=0{,}4$	$-\varepsilon=-0{,}2$	$-\omega_0^2=-3{,}0$	$-2\varepsilon r=-0{,}4$	—
n	$b_n \equiv b_n^{\mathrm{I}}$	$b_n^{(3)}$	$b_n^{(5)}$	$a_n \equiv a_n^{\mathrm{I}}$	$\dot{a}_{n+1}$	$\ddot{a}_{n+2}$
0	+1	+1	+1	+1,000000000	0	−2,800000000
1	0	0	0	0	−2,800000000	+1,120000000
2	0	0	0	−1,400000000	+0,560000000	+3,976000000
3	0	0	0	+0,186666667	+1,325333333	−1,090133334
4	0	0	0	+0,331333333	−0,272533334	−0,884986665
5	0	0	0	−0,054506667	−0,176997333	+0,234318934
6	0	0	0	−0,029499556	+0,039053156	+0,072877406
7	0	0	0	+0,005579022	+0,010411058	−0,020901489
8	0	0	0	+0,001301382	−0,002612686	−0,002859072
9	0	0	0	−0,000290298	−0,000317675	+0,000997964
10	0	0	0	−0,000031768	+0,000099796	+0,000055386
11	0	0	0	+0,000009072	+0,000005035	−0,000029230
12	0	0	0	+0,000000420	−0,000002436	−0,000000286
13	0	0	0	−0,000000187	−0,000000022	+0,000000570
14	0	0	0	−0,000000002	+0,000000041	−0,000000010
15	0	0	0	+0,000000003	−0,000000001	−0,000000009
16	0	0	0	0,000000000	−0,000000001	0,000000000
$\sum$	+1	+1	+1	+0,040561421	−1,317561069	+0,605340165

Контроль: $-3x(t) - 0{,}4x'(t) + 0{,}4x^3(t-1) - 0{,}2x^5(t-1)\,|_{t=1} = 0{,}60534016$5

Таблица 2

Ряд II: $t_0 \equiv t_0^{\mathrm{II}} = 1;\ 1 \leqslant t \leqslant 2;\ [\mu] = \mathrm{II}$

n	$b_n \equiv \dot{b}_n^{\mathrm{II}} = a_n^{\mathrm{I}}$	$b_n^{(2)} = [b_n b_n]$	$b_n^{(3)}$	$b_n^{(5)}$	$a_n \equiv a_n^{\mathrm{II}}$	$\dot{a}_{n+1}$	$\ddot{a}_{n+2}$
0	+1,000000000	+1,000000000	+1,000000000	+1,000000000	+0,040561421	−1,317561069	+0,605340165
1	0	0	0	0	−1,317561069	+0,605340165	+3,710547141
2	−1,400000000	−2,800000000	−4,200000000	−7,000000000	+0,302670083	+1,855273571	−1,930119677
3	+0,186666667	+0,373333334	+0,560000000	+0,933333333	+0,618424524	−0,643373226	−1,560590949
4	+0,331333333	+2,622666666	+6,873999999	+21,256666665	−0,160843307	−0,330147737	−0,863144317
5	−0,054506667	−0,631680002	−1,731520005	−5,499200010	−0,078029547	−0,172628863	+0,710372186
6	−0,029499556	−0,951887999	−5,511165330	−36,516386656	−0,028771477	+0,118395364	+5,137767484
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
31	0	0	0	+0,000000083	+0,000000001	−0,000000015	−0,000000014
32	0	0	0	−0,000000172	0	0,000000000	+0,000000034
33	0	0	0	+0,000000005	0	+0,000000001	−0,000000001
34	0	0	0	+0,000000011	0	0	−0,000000002
Σ	+0,040561421	+0,001645228	+0,000066732	+0,000000104	−0,576455069	+0,246896593	+1,630633243

Контроль: $\{x\,(1)\}^5 = \{0{,}040561421\}^5 = 0{,}000000110$; $\quad -3x(2) - 0{,}4x'\,(2) + 0{,}4x^3\,(1) - 0{,}2x^5\,(1) = +1{,}630633242$

Таблица 3

t	$x\,(t)$	$x'\,(t)$	t	$x\,(t)$	$x'\,(t)$	t	$x\,(t)$	$x'\,(t)$
0,25	+0,9166509	−0,6455190	1,25	−0,2609584	−1,0619500	2,25	−0,4680741	+0,6003773
0,50	+0,6919255	−1,1162170	1,50	−0,4778143	−0,6558231	2,50	−0,2883414	+0,8100757
0,75	+0,3787528	−1,3460479	1,75	−0,5842625	−0,1935921	2,75	−0,0773173	+0,8498281
1,00	+0,0405614	−1,3175611	2,00	−0,5764551	+0,2468966	3,00	+0,1234808	+0,7334352

Таблица 4

Ряд I: $t_0 \equiv t_0^{\mathrm{I}} = 0;\ 0 \leqslant t \leqslant 1$

$[\mu] = \mathrm{I}$	$-\omega_0^2 = -2{,}0$	$\varepsilon\beta = +0{,}5$	—	—	—	—	$-\varepsilon\alpha\beta = -0{,}3$
n	$b_n \equiv b_n^{\mathrm{I}}$	$\dot{b}_{n+1}$	$a_n \equiv a_n^{\mathrm{I}}$	$\dot{a}_{n+1}$	$\ddot{a}_{n+2}$	$a_n^{(2)} = [a_n a_n]$	$[a_n^{(2)}\ \dot{b}_{n+1}]$
0	0	+1,000000000	0	+1,000000000	+0,500000000	0	0
1	+1,000000000	0	+1,000000000	+0,500000000	−2,000000000	0	0
2	0	−50000000000	+0,250000000	−1,000000000	−0,550000000	+1,000000000	+1,000000000
3	−0,166666667	0	−0,333 33333	−0,183333333	+0,183333334	+0,500000000	+0,500000000
4	0	+0,041666667	−0,045833333	+0,045833334	+0,352083334	−1,604166666	−1,104166666
5	+0,008333333	0	+0,009166667	+0,070416667	+0,135833324	−0,258333332	−0,508333332
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
26	0	0	0	0	−0,000000010	+0,000000002	+0,000000032
27	0	0	0	0	−0,000000002	0	+0,000000006
Σ	+0,841470984	+0,540302306	+0,892050872	+0,432167406	−1,541775254	+0,795754750	+0,429948128

Контроль: $-2x\,(t-1) + 0{,}5x'\,(t-1) - 0{,}3x^2\,(t)x'\,(t-1)\,\big|_{t=1} = -1{,}541775254$; $+0{,}795754758 = \{x\,(1)\}^2$

данными во втором шаге. Контроль вычислений осуществляем, сравнив величину $x''(1)=\sum\limits_{n=0}^{16}\ddot{a}_{n+2}=0{,}605340165$ со значением правой части уравнения (8) в точке $t=1$.

Во втором шаге коэффициенты $b_n\equiv b_n^{\mathrm{II}}$ принимаем равными коэффициентам $a_n\equiv a_n^{\mathrm{I}}$ из табл. 1, т. е. полагаем $b_n^{\mathrm{II}}=a_n^{\mathrm{I}}$. Тогда по известным коэффициентам b_n вычисляем последовательно $b_n^{(2)}=[b_nb_n]$; $b_n^{(3)}=[b_n^{(2)}b_n]$; $b_n^{(5)}=[b_n^{(3)}b_n^{(2)}]$ и, присоединив сюда найденные ранее значения $x(1)$ и $x'(1)$, получаем все необходимые для выполнения второго шага (табл. 2).

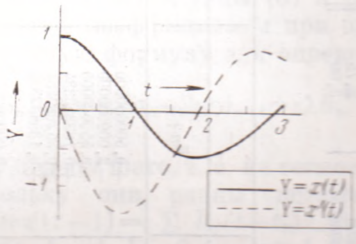

Рис. 1

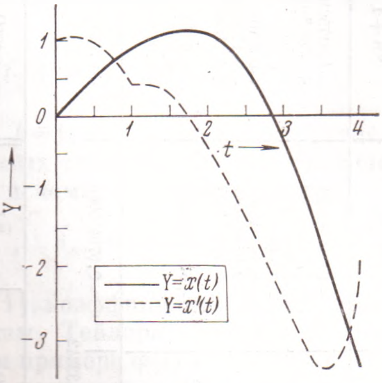

Рис. 2

В третьем шаге полагаем $b_n^{\mathrm{III}}=a_n^{\mathrm{II}}$, и т. д.

В табл. 3 по найденным коэффициентам $a_n^{[\mu]}$, $\dot{a}_{n+1}^{[\mu]}$; $[\mu]=\mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III}$ вычислены на заданном сегменте $[0;\ 3]$ значения искомой функции $x(t)$ и ее производной $x'(t)$, а на рис. 1 построены их графики.

Пример 2. Решить на сегменте $[0;\ 4]$ задачу Коши для уравнения Ван-дер-Поля с запаздыванием:

$$x''(t)=-\omega_0^2x(t-\varepsilon\Delta)+\varepsilon\beta[1-\alpha x^2(t)]x'(t-\tau),\quad x(0)=0,\quad x'(0)=1 \quad (11)$$

при $\omega_0^2=2$, $\varepsilon\Delta=\tau=1$, $\varepsilon\beta=0{,}5$, $\alpha=0{,}6$ и начальной функции $\varphi(t)=\sin t$, $-1\leqslant t\leqslant 0$.

Решение. Воспользовавшись рядами (9), аналогично примеру 1 получаем для уравнения (11) следующую рекуррентную формулу:

$$\ddot{a}_{n+2}=-\omega_0^2b_n+\varepsilon\beta\dot{b}_{n+1}-\varepsilon\alpha\beta[a_n^{(2)}\dot{b}_{n+1}],\quad \dot{a}_{n+2}=\frac{\ddot{a}_{n+2}}{n+1},\quad a_{n+2}=\frac{\dot{a}_{n+2}}{n+2}. \quad (12)$$

На сегменте $[0;\ 1]$ имеем $b_{n+2}=-\dfrac{b_n}{(n+1)(n+2)}$, $b_0=0$, $b_1=1$, $\dot{b}_{n+1}=(n+1)b_{n+1}$, поскольку в данном примере начальная функция

$$\varphi(t)=x(t-1)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(t-t_0)^n=\sin t=t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\frac{t^7}{7!}+\ldots,\quad t_0=0.$$

Поэтому присоединяя $a_0=x(0)=0$ и $a_1=x'(0)=1$ к известным коэффициентам b_n и $\dot{b}_{n+1}$, получаем все исходные данные, необходимые для выполнения первого шага (табл. 4). Дальнейшее решение осуществляется аналогично примеру 1. Графики искомой функции и ее производной представлены на рис. 2.

Институт математики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
26 IV 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. А. Митропольский, Метод усреднения в нелинейной механике, Киев, 1971. [2] Ю. А. Митропольский, Д. И. Мартынюк, Лекции по теории колебаний систем с запаздыванием, Киев, 1969. [3] П. Ф. Фильчаков, Справочник по высшей математике, Киев, 1972.