

М. С. НИКОЛЬСКИЙ

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ УБЕГАНИЯ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 22 V 1973)

Пусть движение вектора z в n -мерном эвклидовом пространстве R^n описывается линейным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = Cz - u + v + a, \quad (1)$$

где C — постоянная квадратная матрица порядка n , $u \in P$ и $v \in Q$ — управляющие векторы, a — постоянный вектор из R^n . Вектором $u(t)$ распоряжается догоняющий объект, вектором $v(t)$ распоряжается убегающий объект. P и Q — выпуклые компакты из R^n .

В R^n задано линейное подпространство M размерности $\leq n-2$. Преследование начинается при $t=0$ из состояния z_0 и считается законченным в тот неотрицательный момент t_1 , когда впервые $z(t_1) \in M$. Движение вектора $z(t)$ происходит под воздействием измеримых управлений $u(t) \in P$, $v(t) \in Q$.

Мы будем рассматривать игру (1) с точки зрения убегающего. Цель убегающего — по возможности оттянуть окончание преследования. Предполагается, что убегающему доступна следующая информация:

- 1) знание матрицы C и множеств P, Q, a ;
- 2) знание $z(s)$ и $u(s)$ при $\max(0, t-h) \leq s \leq t$, где h — некоторая малая константа.

Относительно догоняющего предполагается, что он ведет себя произвольно, применяя допустимое управление $u(t)$.

В этой статье мы дадим достаточные условия того, чтобы из любого начального состояния $z_0 \notin M$ убегающий, используя свою информацию, мог при $t \geq 0$ обеспечить соотношение $z(t) \notin M$, т. е. убежание на всей полуоси $[0, +\infty)$.

Задача убегания впервые была рассмотрена Л. С. Понтрягиным и Е. Ф. Мищенко в работах (1-3), в этих работах получены основополагающие результаты.

В настоящей работе мы даем некоторые условия убегания, отличные от условий Л. С. Понтрягина (см. (3)), в процессе доказательства мы используем некоторые результаты работы (3).

Обозначим через L ортогональное дополнение к M в R^n .

Условия убегания. Существует такое двумерное подпространство W из L , для которого выполнены условия:

- а) не существует в W фиксированного одномерного подпространства W^1 , для которого имеет место включение $\pi e^{\tau C} Q \subset W^1$ при всех малых положительных τ ;

- б) существует такая константа $\mu > 1$, что

$$\mu \pi (E - \tau C)^{-1} P \subset \pi (E - \tau C)^{-1} Q \quad (2)$$

при всех малых положительных τ (буквой π обозначен оператор ортогонального проектирования из R^n на W , относительно определения символа

$\subset$ см. (3)).

Теорема. Если выполнены условия убегания, то имеет место теорема убегания из работы (3).

Доказательство. Из формулы Коши следует, что

$$\pi z(t) = \pi e^{tC} z_0 + \int_0^t \pi e^{(t-s)C} a \, ds + \int_0^t \pi e^{(t-s)C} (v(s) - u(s)) \, ds. \quad (3)$$

Путем параллельной трансляции (которая в (1) компенсируется изменением вектора a) можно добиться того, что при малых $\tau > 0$

$$\mu \pi (E - \tau C)^{-1} P \subset \pi (E - \tau C)^{-1} Q \quad (4)$$

(здесь константа $\mu > 1$ может оказаться меньше μ из (2)) и нулевая точка является внутренней для P и Q с точки зрения соответствующих подпространств, несущих P и Q . Мы будем считать, что соответствующие трансляции уже выполнены и условие (4) имеет место.

Пусть U, V — линейные подпространства R^n , несущие соответственно выпуклые компакты P, Q . Пусть $\dim U = \alpha$, $\dim V = \beta$. Обозначим через D матрицу, осуществляющую гомеоморфное отображение R^α на U , она имеет α столбцов и n строк. Обозначим через F матрицу, осуществляющую гомеоморфное отображение R^β на V , она имеет β столбцов и n строк. Положим $u = D\tilde{u}$, $v = F\tilde{v}$, где $\tilde{u} \in R^\alpha$, $\tilde{v} \in R^\beta$, $P = D\tilde{P}$, $Q = F\tilde{Q}$, где $\tilde{P} \subset R^\alpha$, $\tilde{Q} \subset R^\beta$ и являются выпуклыми компактами, содержащими нулевую точку внутри.

Формула (3) переписывается так:

$$\pi z(t) = \pi e^{tC} z_0 + \int_0^t \pi e^{(t-s)C} a \, ds + \int_0^t \pi e^{(t-s)C} (F\tilde{v}(s) - D\tilde{u}(s)) \, ds.$$

Суть предлагаемого метода состоит в следующем. Управление $\tilde{v}(t) \in \tilde{Q}$ представляется в виде суммы двух измеримых управлений $\tilde{v}_1(t), \tilde{v}_2(t)$, где $\tilde{v}_2(t) \in v\tilde{Q}$ (константа $v \in (1/\mu, 1)$), и является решением следующего интегрального уравнения Вольтерра первого рода:

$$\int_0^t \pi e^{(t-s)C} F \tilde{v}_2(s) \, ds = \int_0^t \pi e^{(t-s)C} D \tilde{u}(s) \, ds, \quad (5)$$

причем для построения $\tilde{v}_2(t)$ используется знание $\tilde{u}(s)$ лишь при $0 \leq s \leq t$; $\tilde{v}_1(t) \in (1-v)\tilde{Q}$ строится по способу Л. С. Понтрягина (см. пункт F) в § 5 работы (3)) с учетом того обстоятельства, что функция $\zeta_s(t)$ (см. там же формулу (32)) в наших условиях тождественно равна 0.

Решить уравнение (5) в свертках при наших предположениях можно, вообще говоря, лишь при достаточно малых $0 \leq t \leq \theta$, где константа θ зависит от матриц C, F, D , множеств P, Q, M , но не зависит от z_0 и конкретной реализации $\tilde{u}(\cdot)$. Это можно сделать, привлекая операторное исчисление Я. Микусинского (см. (4)) и идеи работы (3), следующим образом. Положим $f = \{\pi e^{rC} D\}$, $g = \{\pi e^{rC} F\}$, $r \geq 0$. Операторные матрицы f, g можно записать в виде

$$f = l * \hat{\pi} * (\hat{E} - l * \hat{C})^{-1} * \hat{D}, \quad g = l * \hat{\pi} * (\hat{E} - l * \hat{C})^{-1} * \hat{F},$$

где $*$ означает операцию свертки, матрица $\hat{\mathcal{A}}$ строится из постоянной матрицы $\mathcal{A}$ по правилу $\hat{\mathcal{A}} = l^{-1} * \mathcal{A}$, где l — оператор интегрирования; E — единичная матрица порядка n .

Уравнение (5) можно переписать, используя операцию свертки, в виде $g * \tilde{v}_2(\cdot) = f * \tilde{u}(\cdot)$. Операторным матрицам f, g сопоставим обычные матричные функции $\pi(E - rC)^{-1}D$, $\pi(E - rC)^{-1}F$, где r — действительный числовой параметр. При малых r матрицы $\pi(E - rC)^{-1}F$, $\pi(E - rC)^{-1}D$ допускают

следующую факторизацию:

$$\pi(E-rC)^{-1}F=G(r)H(r), \quad \pi(E-rC)^{-1}D=G(r)K(r),$$

$G(r)$, $H(r)$, $K(r)$ — аналитические при малых r матричные функции, $G(r)$ — $(\beta \times n)$ -матрица (β столбцов, n строк), $H(r)$ — $(\beta \times \beta)$ -матрица, $K(r)$ — $(\alpha \times \beta)$ -матрица, причем последние $\beta - \rho$ строк матриц $H(r)$ и $K(r)$ нулевые, где ρ — ранг матриц $\pi(E-rC)^{-1}F$ и $G(r)$ при малых $r > 0$; $K(0)\bar{P} \subset H(0)\frac{1}{\mu}\bar{Q}$, причем размерность $H(0)\bar{Q}$ равна ρ . Этот факт доказывается, основываясь на результатах пункта В) § 2 из (3) и включении (4). При малых r матричные функции $G(r)$, $H(r)$, $K(r)$ могут быть разложены в ряды:

$$G(r) = \sum_{i=0}^{\infty} G_i r^i, \quad H(r) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i r^i, \quad K(r) = \sum_{i=0}^{\infty} K_i r^i.$$

По этим рядам построим операторные матрицы

$$\bar{G} = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{G}_i * l^i, \quad \bar{H} = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{H}_i * l^i, \quad \bar{K} = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{K}_i * l^i.$$

Очевидно, $g = l * \bar{G} * \bar{H}$, $j = l * \bar{G} * \bar{K}$. Отсюда следует, что решение уравнения в свертках $\bar{H} * \bar{v}_2(\cdot) = \bar{K} * \bar{u}(\cdot)$ является решением уравнения (5). Займемся решением этого нового уравнения. Используя формулу $l^i = \left\{ \frac{r^{i-1}}{(i-1)!} \right\}$, $r \geq 0$ (здесь $i \geq 1$), можно переписать уравнение $\bar{H} * \bar{v}_2(\cdot) = \bar{K} * \bar{u}(\cdot)$ в виде

$$H_0 \bar{v}_2(t) + \int_0^t R(t-s) \bar{v}_2(s) ds = K_0 \bar{u}(t) + \int_0^t T(t-s) \bar{u}(s) ds, \quad (6)$$

где $R(r)$ и $T(r)$ — аналитические функции, определяемые рядами

$$R(r) = \sum_{i=1}^{\infty} H_i \frac{r^{i-1}}{(i-1)!}, \quad T(r) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i \frac{r^{i-1}}{(i-1)!},$$

которые сходятся при всех r ; $K_0 \bar{P} \subset \frac{1}{\mu} H_0 \bar{Q}$. Положим $w = H_0 \bar{v}_2$. Используя идеи пункта С) из § 5 работы (3), можно показать, что существует аналитическое отображение γ множества $H_0 \lambda \bar{Q}$, где λ — некоторая константа из $(1/\mu\nu)$, в множество $\nu \bar{Q}$, удовлетворяющее условию $H_0 \gamma(w) = w$ для $w \in H_0 \lambda \bar{Q}$. Вместо уравнения (6) рассмотрим при малых $t \geq 0$ интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$w(t) + \int_0^t R(t-s) \gamma(w(s)) ds = K_0 \bar{u}(t) + \int_0^t T(t-s) \bar{u}(s) ds,$$

которое имеет решение $w(t) \in H_0 \lambda \bar{Q}$ при достаточно малых t , его можно построить методом последовательных приближений, т. е. используя знание об $\bar{u}(s)$ при $0 \leq s \leq t$. Очевидно, $\bar{v}_2(t) = \gamma(w(t))$ является решением уравнения (6).

Сам процесс убегания и оценка снизу для расстояния точки $z(t)$ от M производится в соответствии с § 6 работы (3).

Отметим, что если выполнены усиленные условия убегания (см. § 1 в ⁽³⁾), то наши условия убегания выполнены. В других случаях условия убегания Л. С. Понтрягина (см. ⁽³⁾) могут быть выполнены, а наши не выполнены, и наоборот. Приведем пример, подтверждающий это обстоятельство.

Пример. Динамика догоняющего: $x_1^{(k_1+1)} = u_1, x_2^{(k_2+1)} = u_2$, где x_1, x_2 — скалярные величины, $1 \leq k_1 < k_2$, двумерный вектор $u \in P_0$ — отрезку в плоскости u_1, u_2 . Динамика убегающего: $y_1^{(h_1)} = v_1, y_2^{(h_2)} = v_2$, где y_1, y_2 — скалярные величины, двумерный вектор $v \in Q_0$ — отрезку в плоскости v_1, v_2 . Отрезок Q_0 будем считать содержащим внутри себя точку $(0, 0)$ и непараллельным прямым $v_1 = 0, v_2 = 0$. Отрезок P_0 будем считать содержащим внутри точку $(0, 0)$. Подпространство M определяется как совокупность точек фазового пространства игры, удовлетворяющих условиям $x_1 = y_1, x_2 = y_2$. Если отрезок P_0 находится внутри отрезка Q_0 , тогда наши условия убегания выполнены, а условия убегания работы ⁽³⁾ не выполнены. Если отрезок P_0 находится внутри отрезка $\begin{pmatrix} k_1, 0 \\ 0, k_2 \end{pmatrix} Q_0$, тогда выполнены условия убегания работы ⁽³⁾, а наши условия убегания не выполнены.

В заключение отмечу, что на возможность применения аппарата сверток в задачах убегания мне указал Р. В. Гамкрелидзе.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
10 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. С. Понтрягин, Е. Ф. Мищенко, Дифференциальные уравнения, № 3 (1971). ² Л. С. Понтрягин, ДАН, 191, № 2 (1970). ³ Л. С. Понтрягин, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, 112 (1971). ⁴ Я. Микусинский, Операторное исчисление, ИЛ, М., 1956.