Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 6

УДК 517.512 *МАТЕМАТИКА*

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ

# ОБ ОЦЕНКЕ НОРМЫ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В КЛАССАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ

Пусть $\mathscr{E}(R)$ — линейно-нормированное пространство функций, определенных на всей вещественной оси $(R)$, в котором норма инвариантна относительно операции любого вещественного сдвига, т. е. $\|f(x+t)\|_{\mathscr{E}} = \|f(x)\|_{\mathscr{E}}$ при любом вещественном $t$.

Обозначим через $B_\sigma(\mathscr{E})$ совокупность целых функций из класса С. Н. Бернштейна $B_\sigma$ (см. ([1]), стр. 38), принадлежащих линейно нормированному пространству $\mathscr{E}(R)$.

Н. И. Азиезер (см. ([2]), стр. 190) заметил, что для целой функции $f(z) \in B_\sigma(\mathscr{E})$ справедливо классическое неравенство С. Н. Бернштейна

$$\|f^{(k)}(x)\|_{\mathscr{E}(R)} \leqslant \sigma^k \|f(x)\|_{\mathscr{E}(R)}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Далее обозначим через $B_{\sigma;\, x_0, \ldots, x_n}(\mathscr{E})$ совокупность всех функций $f(z)$ из класса $B_\sigma(\mathscr{E})$ с вещественными нулями $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

В настоящей работе дается оценка нормы некоторых линейных операторов, определенных для функций $f(z)$ из классов $B_\sigma(\mathscr{E})$ и $B_{\sigma;\, x_0, \ldots, x_n}(\mathscr{E})$, через нормы функции $f(x)$ в пространстве $\mathscr{E}(R)$. Эти оценки являются непосредственными обобщениями неравенства С. Н. Бернштейна, которые могут быть использованы в вопросах приближения целыми функциями в пространстве $\mathscr{E}(R)$.

1. Рассмотрим линейный оператор вида

$$S_n[f] = \frac{f(z)}{\prod\limits_{k=0}^{n} (z - x_k)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

переводящий каждую функцию $f(z)$ из класса $B_{\sigma;\, x_0, \ldots, x_n}(\mathscr{E})$ в целую же функцию, не имеющую нулей в точках $x_0, x_1, x_n$.

Теорема 1. *Если действительное число $x_0$ является нулем кратности $\alpha_0$ целой функции $f(z)$ из класса $B_{\sigma;\, x_0}(\mathscr{E})$, то для нормы оператора*

$$S_{\alpha_0}[f(x)] = \frac{f(x)}{(x - x_0)^{\alpha_0}}$$

*в линейно-нормированном пространстве $\mathscr{E}(R)$, справедливо неравенство* *

$$\|S_{\alpha_0}[f(x)]\|_{\mathscr{E}} \leqslant \frac{\sigma^{\alpha_0}}{(\alpha_0 - 1)!} K_{\alpha_0}(f), \tag{2}$$

---

* В неравенстве (2) пространство $\mathscr{E}(R)$ может быть заменено пространствами $C(R)$, $L_p(R)$, $1 \leqslant p < \infty$, $C^*(-\pi, \pi)$, $L_p^*(-\pi, \pi)$, $1 \leqslant p < \infty$ и другими пространствами типа $\mathscr{E}(R)$. В случае, когда $f(z)$ является $2\pi$-периодической целой функцией (или тригонометрическим полиномом), норма $f(x)$ в пространстве $L_{p^*}(-\pi, \pi)$ берется в виде

$$\|f\|_{L_p^*(-\pi, \pi)} = \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}.$$

*где $K_{\alpha_0}(f)$ — постоянная, не зависящая от $\sigma$,*

$$K_{\alpha_0}(f) = \int_0^1 t^{\alpha_0-1} \|f(xt)\|_{\mathscr{E};\, x}\, dt. \tag{3}$$

Доказательство. Если $x_0$ — нуль кратности $\alpha_0$ функции $f(x)$, то

$$f(x) = \frac{1}{(\alpha_0-1)!}\int_{x_0}^{x} (t-x_0)^{\alpha_0-1} f^{(\alpha_0)}(t)\, dt.$$

Последнее равенство с помощью замены $t = x_0 + (x - x_0)\tau$ приводится к виду

$$\frac{f(x)}{(x-x_0)^{\alpha_0}} = \frac{1}{(\alpha_0-1)!}\int_0^1 t^{\alpha_0-1} f^{(\alpha_0)}[x_0 + (x-x_0)t]\, dt.$$

Отсюда следует неравенство

$$\left\|\frac{f(x)}{(x-x_0)^{\alpha_0}}\right\|_{\mathscr{E}} \leqslant \frac{1}{(\alpha_0-1)!}\int_0^1 t^{\alpha_0-1} \|f^{(\alpha_0)}(xt)\|_{\mathscr{E};\, x}\, dt.$$

Из этого, в силу неравенства С. Н. Бернштейна (1) в линейно-нормированном пространстве $\mathscr{E}(R)$, находим

$$\left\|\frac{f(x)}{(x-x_0)^{\alpha_0}}\right\|_{\mathscr{E}} \leqslant \frac{\sigma^{\alpha_0}}{(\alpha_0-1)!}\int_0^1 t^{\alpha_0-1} \|f(xt)\|_{\mathscr{E};\, x}\, dt,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что в случае $\mathscr{E}(R) \equiv C(R)$

$$K_{\alpha_0}(f) = \int_0^1 t^{\alpha_0-1} \max_{-\infty<x<\infty} |f(xt)|\, dt \leqslant \frac{1}{\alpha_0}\|f(x)\|_{C(R)},$$

а в случае $\mathscr{E}(R) \equiv L_p(R)$, $1 \leqslant p < \infty$,

$$K_{\alpha_0}(f) \leqslant \int_0^1 t^{\alpha_0-1/p-1}\, dt\, \|f(x)\|_{L_p} = \frac{1}{\alpha_0 - 1/p}\|f(x)\|_{L_p}.$$

Таким образом, из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Если $f(x) \in B_{\sigma;\, x_0}$, то*

$$\left\|\frac{f(x)}{(x-x_0)^{\alpha_0}}\right\|_{C(R)} \leqslant \frac{1}{\alpha_0!}\sigma^{\alpha_0}\|f\|_{C(R)}, \tag{4}$$

*а если $f(x) \in W^{(p)}_{\sigma;x_0}$, $1 \leqslant p < \infty$, то*

$$\left\|\frac{f(x)}{(x-x_0)^{\alpha_0}}\right\|_{L_p} \leqslant \frac{\sigma^{\alpha_0}}{(\alpha_0-1)!\,(\alpha_0-1/p)}\|f\|_{L_p}. \tag{5}$$

Применяя неравенства (4) и (5) последовательно к функциям

$$g_1(x) = \frac{f(x)}{(x-x_0)^{\alpha_0}}, \quad g_2(x) = \frac{g_1(x)}{(x-x_1)^{\alpha_1}}, \ldots, g_m(x) = \frac{g_{m-1}(x)}{(x-x_{m-1})^{\alpha_{m-1}}},$$

приходим к следующему более общему заключению.

Следствие 2. *Пусть различные между собой действительные числа $x_0, x_1, \ldots, x_m$ являются нулями соответственно кратности $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$, $\sum_{k=0}^{m} \alpha_k = n$, целой функции $f(z) \in B_\sigma$.*

*Тогда для нормы оператора*

$$S_n[f(x)] = \frac{f(x)}{(x-x_0)^{\alpha_0}(x-x_1)^{\alpha_1}\ldots(x-x_m)^{\alpha_m}}$$

*справедливы неравенства* *

$$\|S_n[f]\|_{C(R)} \leqslant \frac{\sigma^{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_m}}{\alpha_0!\,\alpha_1!\ldots\alpha_m!}\|f\|_{C(R)}, \tag{6}$$

*если* $f(z) \in B_{\sigma;\, x_0,\, \ldots,\, x_m}$, *и*

$$\|S_n[f]\|_{L_p(R)} \leqslant \frac{\sigma^{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_m}}{\prod\limits_{k=0}^{m}(\alpha_k-1)!\,(\alpha_k-1/p)}\|f\|_{L_p(R)}, \tag{7}$$

*если* $f(z) \in W_{\sigma;\, x_0,\, \ldots,\, x_m}$, $1 \leqslant p < \infty$.

Замечание. Из неравенства (7) в случае $p=2$, $n=0$ и $x_0=0$ вытекает, что для целой функции $f(z) \in W^{(2)}_{\sigma;0}$ справедливо неравенство:

$$\left\|\frac{f(x)}{x}\right\|_{L_2(R)} \leqslant 2\sigma\|f\|_{L_2(R)},$$

что и является уточнением соответствующего результата из работы ([4]).

Следствие 3. *Пусть различные между собой действительные числа* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *являются простыми нулями целой функции* $f(z)$ *из класса* $B_\sigma$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\left\|\frac{f(x)}{(x-x_0)\ldots(x-x_n)}\right\|_{C(R)} \leqslant \sigma^{n+1}\|f\|_{C(R)}, \tag{8}$$

*если* $f(z) \in B_{\sigma;\, x_0,\, \ldots,\, x_n}$, *и*

$$\left\|\frac{f(x)}{(x-x_0)\ldots(x-x_n)}\right\|_{L_p} \leqslant \frac{\sigma^{n+1}}{(1-1/p)^{n+1}}\|f\|_{L_p(R)}, \tag{9}$$

*если* $f(z) \in W_{\sigma;\, x_0,\, \ldots,\, x_n}$, $1 \leqslant p < \infty$, *где* $n = 0, 1, 2, \ldots$

В частности, в случае $n=0$, из (8) и (9) соответственно следуют неравенства

$$\left\|\frac{f(x)}{x-x_0}\right\|_C \leqslant \sigma\|f\|_C, \tag{10}$$

$$\left\|\frac{f(x)}{x-x_0}\right\|_{L_p(R)} \leqslant \frac{\sigma}{1-1/p}\|f\|_{L_p(R)}, \quad 1 \leqslant p < \infty. \tag{10'}$$

Следствие 4. *Для целых функций из класса* $B_{\sigma;\, x_0}[1]$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in B_{\sigma;\, x_0}[1]}\left\{\sup_{-\infty<x<\infty}\left|\frac{f(x)}{x-x_0}\right|\right\} = \sigma. \tag{11}$$

В самом деле, равенство (11) является непосредственным следствием неравенства (10). При этом экстремальной функцией является $f_0(z) = \sin\sigma z$; причем в качестве $x_0$ можно взять один из нулей функции $\sin\sigma x$, т. е. $0, \pi/\sigma, \ldots, n\pi/\sigma$. Последнее утверждение показывает, что неравенства (6) и (7), вообще говоря, не могут быть улучшены.

Следствие 5. *Если* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — *различающиеся между собой действительные числа, то для целой функции* $f(z)$ *из класса* $B_{\sigma;\, x_0,\, \ldots,\, x_n}$ *справедливо неравенство*

$$\left\|\frac{f(x)}{[|(x-x_0)\ldots(x-x_n)]^{1/(n+1)}}\right\| \leqslant \sigma\|f\|_{C(R)},$$

*где* $n = 0, 1, 2, \ldots,$

---

* Некоторые из этих утверждений являются уточнениями соответствующих утверждений из работы автора, выполненной совместно с Ф. Г. Насибовым.

2. Рассмотрим теперь множество $B_\sigma^*(\mathscr{E})$ целых функций $f(z)$ из класса $B_\sigma$, представимых в виде интеграла

$$f(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{izt}\, ds(t) \tag{12}$$

и принадлежащих $\mathscr{E}(R)$, где $s(t)$ — функция с ограниченной вариацией на отрезке $[-\sigma, \sigma]$.

Предположим, что оператор $\mathscr{L}[f]$ преобразует каждую функцию $f(z) \in B_\sigma^*(\mathscr{E})$ в функцию

$$\mathscr{L}[f(z)] = \int_{-\sigma}^{\sigma} \mu(t)\, e^{izt} ds(t), \tag{13}$$

где $\mu(t)$ — непрерывная функция на отрезке $[-\sigma, \sigma]$.

Очевидно, $\mathscr{L}[f(z)]$ является линейным оператором, действующим в классе $B_\sigma^*(\mathscr{E})$.

Теорема 2. *Пусть $\mu(t)$ — абсолютно непрерывная функция на отрезке $[-\sigma, \sigma]$, удовлетворяющая условию $\mu(-\sigma) = e^{i\theta}\mu(\sigma)$ при $0 < \theta < 2\pi$ и $\mu(-\sigma) = \mu(\sigma)$ при $\theta = 0$, и $\mu'(t) = K(t)$ — функция с ограниченной вариацией на отрезке $[-\sigma, \sigma]$.*

*Тогда имеет место неравенство* *

$$\|\mathscr{L}[f(x)]\|_{\mathscr{E}} \leqslant Q(\sigma;\ \theta) \cdot \|f(x)\|_{\mathscr{E}}, \tag{14}$$

*где*

$$Q(\sigma;\ \theta) = \frac{\sigma}{2} \csc^2 \frac{\theta}{2} \{|K(-\sigma)| + |K(+\sigma)| + \operatorname{var}(K)\}, \tag{15}$$

*т. е. из принадлежности функции $f(z)$, определяемой равенством (12), линейно-нормированному пространству $\mathscr{E}(R)$ следует принадлежность оператора $\mathscr{L}[f]$ тому же пространству $\mathscr{E}(R)$.*

Из теоремы 2 вытекает

Следствие. *Если в условиях теоремы 2 функция $\mu(t)$ удовлетворяет еще неравенствам*

$$(-1)^n C_n = (-1)^n \int_{-\sigma}^{\sigma} \mu(t)\, e^{i[\alpha - p(n)]t}\, dt \geqslant 0, \quad n = 0, \pm 1, \ldots,$$

*то*

$$\|\mathscr{L}[f(x)]\|_{\mathscr{E}} \leqslant |\mu(\sigma)| \cdot \|f(x)\|_{\mathscr{E}(R)},$$

*а если $\mu(t)$ удовлетворяет условиям, что*

$$C_n = \int_{-\sigma}^{\sigma} \mu(t)\, e^{i[\alpha - p(n)]t}\, dt \geqslant 0, \quad n = 0, \pm 1, \ldots,$$

*то*

$$\|\mathscr{L}[f(x)]\|_{\mathscr{E}} \leqslant |\mu(0)| \cdot \|f\|_{\mathscr{E}(R)}.$$

Из этого утверждения немедленно следует неравенство С. Н. Бернштейна (1), если положить, что $\mu(t) = it$.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
10 IV 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. И. Ибрагимов, Экстремальные свойства целых функций конечной степени, Баку, 1962. [2] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, «Наука», 1965. [3] И. И. Ибрагимов, Ф. Г. Насибов, Матем. заметки, 5, № 5, 497 (1969). [4] Q. I. Rahman, M. Alikhan, Canad. math. Bull., 10, № 2, 179 (1967). [5] P. Civin, Duke Math. J., 8 (1941).

* В случае $\mathscr{E}(R) = C(R)$ и $\mathscr{E}(R) = L_p(R)$, $p \geqslant 1$, неравенство (14) доказано в работе ([5]) (см. также ([1]), стр. 97).