Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 2

УДК 517.43+513.881 МАТЕМАТИКА

Г. В. РАДЗИЕВСКИЙ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПОЛНОТЫ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 18 IV 1973)

В данной заметке рассматриваются вопросы полноты корневых векторов аналитических в угле оператор-функций, близких к пучкам М. В. Келдыша ([1]). Мы всюду пользуемся терминологией и обозначениями из ([1, 2]).

1. Пусть имеется N оператор-функций $Q_l(\lambda)$, аналитичных в окрестности точки λ_0, и произвольная цепочка элементов $\varphi_0, \ldots, \varphi_m$ из $\mathfrak{H}$. В пространстве $\mathfrak{H}^N$ образуем $m+1$ элемент по правилу

$$\bar{\varphi}_s = \{\varphi_{s,1}, \ldots, \varphi_{s,N}\}, \quad s=0,1,\ldots,m, \tag{1}$$

где

$$\varphi_{s,l} = \sum_{k=0}^{s} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} Q_l(\lambda_0)\varphi_{s-k}.$$

Пусть теперь λ_0 есть характеристическое число некоторой оператор-функции $L(\lambda)$, а цепочка $\varphi_0, \ldots, \varphi_m$ есть цепочка собственного и присоединенных к нему векторов, отвечающая этому характеристическому числу. Тогда набор элементов (1) условимся называть производной по $Q_l(\lambda)$ цепочкой. Далее, через $\mathfrak{P}(L(\lambda);\ \lambda_0;\ Q_1(\lambda), \ldots, Q_N(\lambda))$ будем обозначать линейную оболочку всех производных по $Q_l(\lambda)$ цепочек, отвечающих характеристическому числу λ_0, а через $\mathfrak{P}(L(\lambda); \Omega; Q_1(\lambda), \ldots, Q_N(\lambda))$ — линейную оболочку множества $\bigcup\limits_{\lambda_i \in \Omega} \mathfrak{P}(L(\lambda); \lambda_i; Q_1(\lambda), \ldots, Q_N(\lambda))$, где λ_i — характеристические числа $L(\lambda)$, лежащие в Ω.

2. С х е м а о с н о в н о г о м е т о д а. Мы будем изучать полноту производных по $Q_l(\lambda)$ цепочек оператор-функций $L(\lambda)$. Предполагается, что $Q_l(\lambda)$ и $L(\lambda)$ аналитичны в угле $\Psi_\alpha = \{\lambda: |\arg\lambda| < \pi\alpha\}$, непрерывны вплоть до границы, а оператор-функция $L^{-1}(\lambda)$ имеет своими особенностями только полюсы, не имеющие конечных точек сгущения на границе угла Ψ_α. Предположим, что $\overline{\mathfrak{P}(L(\lambda); \Psi_\alpha; Q_1(\lambda), \ldots, Q_N(\lambda))} \neq \mathfrak{H}^N$. Тогда существует такой ненулевой вектор $\bar{f} \in \mathfrak{H}^N$, что по лемме 3 из ([3]) функция

$$f(\lambda) = [L^*(\bar{\lambda})]^{-1} \sum_{l=1}^{N} Q_l^*(\bar{\lambda}) f_l$$

аналитична в Ψ_α и непрерывна в $\overline{\Psi}_\alpha$. Введем скалярную функцию $F(\lambda) = (f(\lambda), f(\bar{\lambda}))$. Во многих случаях удается доказать (это делается, как правило, с привлечением теорем Фрагмена — Линделефа и стандартных оценок резольвенты), что в угле Ψ_α функция $F(\lambda)$ имеет рост $o(|\lambda|^{-d})$, а на границе угла — $F(\lambda) \neq 0$. Эта ситуация, конечно, не содержит в себе противоречия. Следующее наше замечание состоит в том, что существуют такие подпространства $\mathfrak{L}^N \subset \mathfrak{H}^N$ (часто конечной коразмерности), что если $\bar{f} \in \mathfrak{L}^N$, то для функции $F(\lambda)$ имеют место оценки, гарантирующие обращение ее в тождественный нуль. Более точно, пусть для некоторого подпространства $\mathfrak{L}^N$ справедливо неравенство

$$|\arg F(\lambda)|\leqslant\pi\beta\leqslant\pi/2, \quad \beta\leqslant d\alpha, \quad \lambda\in\partial\Psi_\alpha, \quad F(\lambda)\neq 0; \tag{2}$$

тогда

$$\overline{\mathfrak{P}(L(\lambda);\ \Psi_\alpha;\ Q_1(\lambda),\ldots,Q_N(\lambda))+(\mathfrak{H}^N\ominus\mathfrak{L}^N)}=\mathfrak{H}^N.$$

Действительно, если это не так, то существует ненулевой вектор $\bar{f}\perp\mathfrak{P}(L(\lambda);\ \Psi_\alpha;\ Q_1(\lambda),\ldots,Q_N(\lambda))$ и $\bar{f}\in\mathfrak{L}^N$. Тогда для этого вектора $|F(\lambda)|=o(|\lambda|^{-d})$ и $F(\lambda)\not\equiv 0$, но отсюда и из оценки (2) нетрудно получить противоречие с неравенством Каратеодори ([4], стр. 29).

В таком виде этот метод применяется при доказательстве теорем 1 и 2. В других теоремах функция $F(\lambda)$ строится несколько иначе, например, в теореме 4, $F(\lambda)=(f(\lambda),C^{1/2}f)$. Надо сказать, что выбор функции $F(\lambda)$, а также выбор соответствующего подпространства $\mathfrak{L}^N$ является наиболее существенной частью при конкретной реализации нашего метода.

3. Введем некоторые обозначения, используемые в дальнейшем. Через P_A мы будем обозначать ортопроектор на $\overline{\mathfrak{R}(A)}$, где $\mathfrak{R}(A)$ — область значений оператора A, а через $\mathfrak{Z}^N(A)$ — подпространство $\mathfrak{H}^N$, состоящее из векторов $\bar{f}=\{f_1,\ldots,f_N\}$, где $f_i\in\mathfrak{Z}(A)$, ядру оператора A.

Приведем следствия нашего метода.

Теорема 1. *Пусть нам даны:*

1) *оператор-функции $S_k(\lambda)$ и $G_k(\lambda)$, аналитические в $\Psi_{\pi/n}$ и функции $\|S_k(\lambda)\|$ равномерно стремятся к нулю при $\lambda\to\infty$ $(\lambda\in\Psi_{\pi/n})$, а $\|G_k(\lambda)\|$ равномерно ограничены;*

2) *T_k и $H\in\mathfrak{S}_\infty$, причем $H\geqslant 0$ и существует такое $q>0$, что*

$$\varliminf n^q\lambda_n(H)=0.$$

Тогда для оператор-функции

$$L(\lambda)=E-S_0(\lambda)-G_0(\lambda)T_0P_H-\sum_{k=1}^{n-1}\lambda^k[S_k(\lambda)+G_k(\lambda)T_k]H^k-\lambda^nH^n \tag{3}$$

при любых положительных ν и δ, $\delta\leqslant\pi/n$, подпространство

$$\overline{\mathfrak{P}(L(\lambda);\ \Psi_\delta;\ H^\nu)+\mathfrak{Z}(H)}$$

имеет конечную коразмерность в $\mathfrak{H}$.

Из этой теоремы легко следует

Теорема 2. *Рассмотрим оператор-функцию*

$$M(\lambda)=A^n-T_0A^n-\lambda T_1A^{n-1}-\ldots-\lambda^{n-1}T_{n-1}A-\lambda^nE, \tag{4}$$

где A — неотрицательный неограниченный оператор с дискретным спектром такой, что $\varliminf n^{-q}\lambda_n(A)=\infty$ при некотором $q>0$, а $T_k\in\mathfrak{S}_\infty$.

Тогда подпространство $\overline{\mathfrak{P}(M(\lambda);\ \Omega_{\delta,m};\ E)}$ имеет конечную коразмерность в $\mathfrak{H}$ для любой области $\Omega_{\delta,m}$ вида $\Omega_{\delta,m}=\{\lambda\colon\ |\arg\lambda-2\pi m/n|<\delta\}$, где $m=0,1,\ldots,n-1$.

Следующая теорема в абстрактной форме выражает некоторые задачи механики (подробная библиография имеется в [5]).

Теорема 3. *Рассмотрим пучок*

$$L(\lambda)=E+T_0P_H+\sum_{k=1}^{2n-1}(-i\lambda)^kT_kH^k+(-i\lambda)^{2n}H^{2n},$$

где операторы T_k и H удовлетворяют условию 2 теоремы 1.

Тогда для любых $\nu_i>0$ подпространство

$$\overline{\mathfrak{P}(L(\lambda);\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0; H^{\nu_1}, (-i\lambda)^2H^{2+\nu_2},\dots,(-i\lambda)^{2(n-1)}H^{2(n-1)+\nu_n})+\mathfrak{Z}^n(H)}$$

имеет конечную коразмерность в $\mathfrak{H}^n$.

Замечание 1. Теорема 3 допускает обобщение на пучки вида (3) и (4), а также на другие производные по $Q_l(\lambda)$ цепочки.

4. Перейдем к теоремам для квадратичного пучка

$$L(\lambda)=E+\lambda B+\lambda^2C+i\lambda A, \tag{5}$$

где самосопряженные операторы A, B и $C\in\mathfrak{S}_\infty$, а $C\geqslant 0$. Мы часто будем пользоваться условием

$$(Bx, x)^2\leqslant\varkappa^2(Cx, x)(x, x),\quad 0\leqslant\varkappa<2. \tag{6}$$

Теорема 4. *Пусть существует такое $q>0$, что $\underline{\lim}\, n^q s_n(A)=\underline{\lim}\, n^{2q}s_n(C)$ и условие (7) выполнено при $\varkappa\leqslant 2\sin{}^1/_2\pi q'$, где $q'=\min(q, 1)$, а если $B\geqslant 0$ $(B\leqslant 0)$, то при $\varkappa\leqslant 2\sin\pi q'$, где $q'=\min(q, {}^1/_2)$. Тогда*

$$\overline{\mathfrak{P}(L(\lambda);\mathbb{C}; E,\lambda E)}\oplus\begin{pmatrix}E & 0\\ B-iA & E\end{pmatrix}\mathfrak{Z}\begin{pmatrix}C & B-iA\\ 0 & C\end{pmatrix}=\mathfrak{H}^2 \tag{7}$$

и

$$\overline{\mathfrak{P}(L(\lambda);\operatorname{Im}\lambda>0; C^{1/2})}+\mathfrak{Z}(C)=\mathfrak{H}. \tag{8}$$

Замечание 2. В случае $B\geqslant 0$ $(B\leqslant 0)$ при условии $\underline{\lim}\, ns_n(A)=\underline{\lim}\, ns_n(B)=\underline{\lim}\, n^2s_n(C)$ имеет место равенство (7). Интересно отметить, что при этом условие вида (6) не накладывается.

Теорема 4 и замечание 1 значительно усиливают и обобщают результаты работ [6, 7]. Если $\mathfrak{Z}(C)\neq\{0\}$, то формула (8) означает, что собственные и присоединенные векторы $L(\lambda)$, отвечающие характеристическим числам, лежащим в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda>0$ $(\operatorname{Im}\lambda<0)$ полны в пространстве $\mathfrak{H}(C^{1/2})$, т. е. в пространстве со скалярным произведением, заданным формой $(C^{1/2}f, g)$; последнее замечание относится также к теоремам 1 и 3.

5. Рассмотрим простое применение метода п. 2 к пучку, порожденному обыкновенным дифференциальным уравнением

$$l(\lambda)y=y''+2\lambda dy'+\lambda^2y=0,\quad |d|<1,$$

удовлетворяющему трем типам граничных условий, зависящих от спектрального параметра λ:

$$U_1(\lambda, y)=\begin{pmatrix}\alpha_{10}(\lambda) & \alpha_{11}(\lambda)\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y(0)\\ y'(0)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ \beta_{20}(\lambda) & \beta_{21}(\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y(1)\\ y'(1)\end{pmatrix}=0,$$

$$|\alpha_{10}(\lambda)|+|\alpha_{11}(\lambda)|\neq 0,\quad |\beta_{20}(\lambda)|+|\beta_{21}(\lambda)|\neq 0;$$

$$U_2(\lambda, y)=\begin{pmatrix}\alpha_{10}(\lambda) & 1\\ \alpha_{20}(\lambda) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y(0)\\ y'(0)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ \beta_{20}(\lambda) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y(1)\\ y'(1)\end{pmatrix}=0;$$

$$U_3(\lambda, y)=\begin{pmatrix}\alpha_{10}(\lambda) & \alpha_{11}(\lambda)\\ \alpha_{20}(\lambda) & \alpha_{21}(\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y(0)\\ y'(0)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y(1)\\ y'(1)\end{pmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix}\alpha_{10}(\lambda) & \alpha_{11}(\lambda)\\ \alpha_{20}(\lambda) & \alpha_{21}(\lambda)\end{vmatrix}\neq 0.$$

Для простоты будем считать, что $\alpha_{ij}(\lambda)$ и $\beta_{ij}(\lambda)$ — полиномы. Тогда имеет место

Теорема 5. *Система собственных и присоединенных векторов $l(\lambda)y=0$, отвечающая характеристическим числам, лежащим в полупло-*

скости $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ $(\mathrm{Re}\,\lambda<0)$, *полна в* $L_2(0,1)$, *если при вещественном* μ *ко-эффициенты:*

1) *для* $\tilde{U}_1(\lambda, y)$ *удовлетворяют условиям*

$$\mathrm{Re}\frac{\alpha_{10}(i\mu)}{\alpha_{11}(i\mu)}\geqslant 0 \quad \left(\text{либо } \mathrm{Re}\frac{\alpha_{11}(i\mu)}{\alpha_{10}(i\mu)}\geqslant 0\right)$$

и

$$\mathrm{Re}\frac{\beta_{10}(i\mu)}{\beta_{11}(i\mu)}\leqslant 0 \quad \left(\text{либо } \mathrm{Re}\frac{\beta_{11}(i\mu)}{\beta_{10}(i\mu)}\leqslant 0\right);$$

2) *для* $\tilde{U}_2(\lambda, y)$ *удовлетворяют условиям*

$$\mathrm{Re}\,\beta_{20}(i\mu)\geqslant 0, \quad -4\mathrm{Re}\,\alpha_{10}(i\mu)\ \mathrm{Re}\,\beta_{20}(i\mu)\geqslant|\alpha_{20}(i\mu)|^2;$$

3) *для* $\tilde{U}_3(\lambda, y)$ *удовлетворяют условиям*

$$\mathrm{Re}\,[\overline{\alpha_{10}(i\mu)}\alpha_{20}(i\mu)]\leqslant 0, \quad 4\mathrm{Re}\,[\overline{\alpha_{10}(i\mu)}\alpha_{20}(i\mu)]\ \mathrm{Re}\,[\overline{\alpha_{11}(i\mu)}\alpha_{21}(i\mu)]\geqslant$$

$$\geqslant|\overline{\alpha_{11}(i\mu)}\alpha_{20}(i\mu)+\alpha_{10}(i\mu)\overline{\alpha_{21}(i\mu)}-1|^2.$$

Эта теорема обобщает результаты работ ([7], [8]). Если α_{ij} и β_{ij} постоянные то теорему 5 можно сформулировать по-другому.

Теорема 5′. *Система собственных и присоединенных векторо $l(\lambda)y=0$ при граничном условии $\tilde{U}$, отвечающая характеристическим чис лам, лежащим в полуплоскости* $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ $(\mathrm{Re}\,\lambda<0)$, *полна в* $L_2(0,1)$, *есл при граничном условии $\tilde{U}$ оператор y'' — диссипативный.*

6. Если коэффициенты полиномиального пучка $L(\lambda)$ самосопряжены то метод п. 2 можно модифицировать, основываясь на возможности анали тического продолжения формы $(L^{-1}(\lambda)f, f)$. Невещественные характери стические числа $L(\lambda)$ обозначим через $\sigma_H(L)$, а вещественные — чере $\sigma_B(L)$. Множество $\sigma_H(L)$ представим в виде $\sigma_H(L)=\Lambda\cup\Lambda$, так что $\Lambda\cap\bar{\Lambda}=$ и если $\lambda_0\in\Lambda$, то $\bar{\lambda}_0\in\bar{\Lambda}$.

Теорема 6. *Рассмотрим пучок*

$$L(\lambda)=E+T_0+\lambda HT_1H+\ldots+\lambda^{2n-1}H^{2n-1}T_{2n-1}H^{2n-1}+\lambda^{2n}H^{4n}, \qquad (9$$

где T_k и H удовлетворяют условию 2 теоремы 1, причем $T_k=T_k^*$, а $H>$

Тогда для любого Λ

$$\overline{\mathfrak{P}(L(\lambda);\Lambda\cup\sigma_B;E,\lambda H^2,\ldots,\lambda^{n-1}H^{2(n-1)})}=\mathfrak{H}^n.$$

Заметим, что к пучку вида (9) сводится пучок М. В. Келдыша с само сопряженными коэффициентами.

Теорема 7. *Рассмотрим пучок* (5) *при* $A=0$.

Тогда в условиях теоремы 4 или замечания 2 для любого Λ

$$\overline{\mathfrak{P}(L(\lambda);\Lambda\cup\sigma_B;E)+\mathfrak{Z}(C)}=\mathfrak{H}.$$

В заключение автор сердечно благодарит В. В. Жикова и А. Г. Кост ченко, прочитавших рукопись и сделавших ценные замечания.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступи.
3 IV 19

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Келдыш, ДАН, 77, № 1 (1951). [2] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Вв дение в теорию несамосопряженных операторов, «Наука», 1965. [3] Г. В. Радзие ский, Матем сборн., 91, (133): 3 (7) (1973). [4] Б. Я. Левин, Распределение корн целых функций, 1956. [5] И. И. Ворович, Тр. II Всесоюзн. съезда по теоретическ и прикладной механике, в. 3, «Наука», 1966. [6] М. Г. Крейн, Г. К. Лангер, ДА 154, № 6 (1964). [7] М. Г. Гасымов, ДАН, 199, № 4 (1971). [8] М. Г. Джавадо ДАН, 159, № 4 (1964).