Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 2

УДК 517.536 МАТЕМАТИКА

Н. А. ШИРОКОВ

О ВЗВЕШЕННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ НА ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВАХ С УГЛАМИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 21 V 1973)

В настоящей заметке приводятся теоремы о приближении функций на компакте комплексной плоскости, обобщающие и усиливающие ряд результатов работ [1,2].

1. $\bar{G}$ — компакт на комплексной плоскости, дополнение которого односвязно и содержит более двух точек; $z=\psi(t)=\gamma t+\gamma_0+\gamma_1(t)^{-1}+\ldots$, $\gamma>0$,— функция, регулярная в области $1<|t|<\infty$ и отображающая эту область конформно на $C\bar{G}$; $t=\varphi(z)$ — обратная к $z=\psi(t)$ функция; $\Gamma=\partial\bar{G}$, $\Gamma_R=\psi(\{|t|=R\})$; $\rho_R(z)=\operatorname{dist}(\{z\},\Gamma_R)$.

Пишем $\bar{G}\in\Psi(c_1,c_2,t_1,\alpha_1,\ldots,t_l,\alpha_l)$ (см. [3]), если:

$$0<c_1<c_2<\infty,\quad t_j=e^{i\theta_j},\quad -\pi\leqslant\theta_1<\theta_2<\ldots<\theta_l<\pi,\quad 0<\alpha_j\leqslant 2,\quad j=1,\ldots,l,$$

и

$$c_1|1-t_j/t|^{\alpha_j-1}\leqslant|\psi'(t)|\leqslant c_2|1-t_j/t|^{\alpha_j-1},\quad |t|>1,\quad |\arg(t_j/t)|<h; \tag{1_1}$$

$$c_1\leqslant|\psi'(t)|\leqslant c_2,\quad |t|>1,\quad |\arg(t_j/t)|\geqslant h,\quad j=1,\ldots,l; \tag{1_2}$$

$$\psi(t)=\psi(t_j)+A_j(t)(1-t_j/t)^{\alpha_j},\quad |t|>1,\quad |\arg(t_j/t)|<h, \tag{1_3}$$

где $h=\min\limits_{j\neq j'}(|\theta_j-\theta_{j'}|,1/2)$, $A_j(t)$ — функция, регулярная в $|t|>1$, непрерывная в точке t_j, и выбрана та ветвь функции $(1-t_j/t)^{\alpha_j}$, которая обращается в единицу при $t=\infty$. Используя условие (1_3), нетрудно показать, что в точках $z_j=\psi(t_j)$ существуют односторонние касательные, причем один из углов, образованных ими (внешний по отношению к $\bar{G}$), равен $\alpha_j\pi$.

Далее $\omega(x)$ — нормальный модуль непрерывности [4], т. е.

$$\inf_{x>0}\frac{x}{\omega(x)}\int\limits_{x/2}^{x}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt>0. \tag{2_0}$$

Пишем $\omega(x)\in\mathscr{L}(\beta,\alpha,\sigma)$, если $0<\beta<1$, $0<\alpha<2$, $0<\sigma\alpha+1-\sigma\leqslant 2$, $\omega(x)$ удовлетворяет (2_0) и при любом $s<\beta(\sigma+(1-\sigma)/\alpha)$ и $x>0$

$$\int\limits_0^x\frac{\omega(t)^\sigma\,\omega(t^{1/\alpha})^{1-\sigma}}{t^{1+s}}\,dt\leqslant c_s\frac{\omega(x)^\sigma\,\omega(x^{1/\alpha})^{1-\sigma}}{x^s}; \tag{2_1}$$

при любом $s>\beta(\sigma+(1-\sigma)/\alpha)$, $x>0$

$$\int\limits_x^\infty\frac{\omega(t)^\sigma\,\omega(t^{1/\alpha})^{1-\sigma}}{t^{1+s}}\,dt\leqslant c_s\frac{\omega(x)^\sigma\,\omega(x^{1/\alpha})^{1-\sigma}}{x^s}; \tag{2_2}$$

при любых $x>0$, $a>0$, $s<\beta$

$$\int\limits_0^x\frac{\omega(t)^\sigma\,\omega(at)^{1-\sigma}}{t^{1+s}}\,dt\leqslant c_s\omega(x)^\sigma\,\omega(ax)^{1-\sigma}x^{-s}, \tag{2_3}$$

а при $s>\beta$

$$\int\limits_x^\infty \frac{\omega(t)^\sigma \omega(at)^{1-\sigma}}{t^{1+s}}\,dt \leqslant c_s \omega(x)^\sigma \omega(ax)^{1-\sigma} x^{-s}. \qquad (2_4)$$

В частности, для любого p и любых возможных α, σ

$$\omega(x)=x^\beta(|\ln x|+1)^p \in \mathscr{L}(\beta, \alpha, \sigma).$$

Условия $(2_1)-(2_4)$ можно трактовать так: $\omega(x)$ отличается от x^β на «медленно меняющийся» сомножитель. Если $\sigma=1$ или 0, то (2_3) и (2_4) превращаются соответственно в (2_1) и (2_2).

2. Теорема. *Пусть $\overline{G}\in\Psi(c_1, c_2, t_1, \alpha_1, \ldots, t_l, \alpha_l)$, функция f аналитична в G и непрерывна в $\overline{G}$, $\sigma(z)$ — непрерывная на Γ функция, причем $\sigma(z)\equiv\sigma_j$ в окрестности $|z-z_j|<\varepsilon_j$ точки $z_j=\psi(t_j)$, $r\geqslant 0$ целое, $0<\beta<1$, $L=r+\beta$, числа $L\sigma_j+L(1-\sigma_j)/\alpha_j$ нецелые при $j=1, \ldots, l$, $\omega(x)\in\mathscr{L}(\beta, \alpha_j, \sigma_j)$, $j=1, \ldots, l$.*

Тогда для того чтобы нашлись полиномы $P_n(z)$ степени $\leqslant n$ такие, что

$$|f(z)-P_n(z)| \leqslant c[\rho^r_{1+1/n}(z)\,\omega(\rho_{1+1/n}(z))]^{\sigma(z)} \left[\frac{1}{n^r}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{1-\sigma(z)}, \qquad (3)$$

$$z\in\Gamma, \quad n\geqslant 1, \quad c=\text{const},$$

необходимо и достаточно, чтобы $f=F+Q$, где Q — некоторый фиксированный полином, а F удовлетворяет следующим условиям: вне малых фиксированных окрестностей точек z_j, $|z-z_j|<\varepsilon_j$

$$\omega(F^{(r)}(z), \delta) \leqslant c\omega(\delta), \quad z\in\Gamma, \qquad (4_1)$$

если

$$|z^{(1)}-z_j|<\varepsilon_j, \quad |z^{(2)}-z_j|<\varepsilon_j,$$

$$\delta=|z^{(1)}-z^{(2)}|<\min(|z^{(1)}-z_j|/2,\ |z^{(2)}-z_j|/2)=a, \ z^{(1)}, z^{(2)}\in\Gamma,$$

то

$$|F^{(r)}(z^{(1)})-F^{(r)}(z^{(2)})| \leqslant \text{const}\cdot a^{r(\sigma_j\alpha_j+1-\sigma_j)/\alpha_j-r}\,\omega(\delta)^{\sigma_j}\,\omega(\delta a^{1/\alpha_j-1})^{1-\sigma_j}. \qquad (4_2)$$

Следствие. *Пусть L/α_j нецелые, условия на $\overline{G}$ и f, ω — как в теореме. Для того, чтобы существовала последовательность полиномов $P_n(z)$ таких, что*

$$|f(z)-P_n(z)| \leqslant c\,\frac{1}{n^r}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right), \qquad (5)$$

необходимо и достаточно, чтобы $f=Q+F$, где Q — фиксированный полином, а F вне всех $|z-z_j|<\varepsilon_j$, $j=1, \ldots, l$, такая же, как в теореме, а при $|z^{(\nu)}-z_j|<\varepsilon_j$, $\nu=1, 2$, в тех же обозначениях

$$|F^{(r)}(z^{(1)})-F^{(r)}(z^{(2)})| \leqslant \text{const}\cdot a^{r(1/\alpha_j-1)}\,\omega(\delta a^{1/\alpha_j-1}), \quad z^{(\nu)}\in\Gamma. \qquad (6)$$

Примечание. В работе [3] построена область $D\in\Psi(c_1', c_2')$ специального вида такая, что функция $z=\psi_*(\zeta)=\beta\zeta+\beta_0+\beta_1\zeta^{-1}+\ldots$, отображающая $C\overline{D}$ на $C\overline{G}$, удовлетворяет условиям $(1_1)-(1_3)$. Тогда следствие может быть переформулировано так:

чтобы в предположениях следствия выполнялось (5), *необходимо и достаточно, чтобы $f=Q+F$, где Q — полином, а $v(\zeta)=F(\psi_*(\zeta))$ удовлетворяет условию*

$$\omega(v^{(r)}(\zeta), \delta) \leqslant c\omega(\delta). \qquad (7)$$

В случае $\sigma(z)\equiv 1$ прямые теоремы приближения без ограничения на модуль непрерывности $\omega(x)$ при тех же предположениях на границу установлены Н. А. Лебедевым и автором [3]; при иных предположениях на Γ прямые теоремы установлены В. К. Дзядыком [5-7]. Обратные теоремы при очень слабых ограничениях ($\sigma(z)\equiv 1$) доказаны Н. А. Лебедевым и П. М. Тамразовым [4, 8]. В случае $\sigma(z)\equiv 0$, $\omega(x)=x^\beta$ и при значительно более гладкой, чем у нас, границе $\overline{G}$ прямые и обратные теоремы в иных терминах доказаны В. К. Дзядыком и Г. А. Алибековым ([1], [2]) (подробный обзор имеется в работе ([9])).

3. При доказательстве обратной теоремы представляем функцию в виде

$$f(z)=\sum_{n\geqslant 0}^{\infty} p_n(z),$$

где

$$p_n(z)=P_{2^n}(z)-P_{2^{n-1}}(z),\quad P_0(z)=p_0(z),$$

$P_k(z)$ — приближающие полиномы.

Затем полагаем

$$q_j=[L\sigma_j+L(1-\sigma_j)/\alpha_j],$$

$$Q_j(z)=\sum_{n\geqslant 0}\sum_{\nu\leqslant q_j}\frac{p_n^{(\nu)}(z_j)}{\nu!}(z-z_j)^\nu=\sum_{\nu\leqslant q_j}\frac{(z-z_j)^\nu}{\nu!}\sum_{n\geqslant 0}p_n^{(\nu)}(z_j),$$

$Q(z)$ — полином, достаточно хорошо приближающий полиномы $Q_j(z)$ при $|z-z_j|<\varepsilon_j$.

При $|z-z_j|<\varepsilon_j$ имеем

$$F=f-Q=(f-Q_j)+(Q_j-Q)=F_j+R_j,$$

R_j — полином,

$$F_j(z)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{q_j!}\int_{z_j}^{z}(z-t)^{q_j}p_n^{(q_j+1)}(t)\,dt=\sum_{n\geqslant 0}\left[p_n(z)-\sum_{\nu\leqslant q_j}\frac{p_n^{(\nu)}(z_j)}{\nu!}(z-z_j)^\nu\right].$$

При проведении оценок используется частный случай фундаментального результата из ([4]) (обозначения там же): пусть $\theta(x)$ — обобщенный модуль непрерывности, имеющий коэффициент нормальности $\psi_*(t)$, $\lambda>0$, $1\leqslant p\leqslant q$, q целое, $R_q(\zeta)$ — полином степени $\leqslant q$, удовлетворяющий при всех $z\in\Gamma$ условию

$$|R_q(z)|\leqslant\theta(\rho_{1+\lambda/p}(z)).$$

Тогда при всех $z_0\in\Gamma$ и $h\in(0,q/p)$ справедливы оценки

$$|R_{q(z_0)}^{(\nu)}|\leqslant\nu!\,\theta(\rho_{1+\lambda/p}(z_0))\,\psi_*[T_*(z_0,\rho_{1+\lambda/p}(z_0))]\frac{e^{h\lambda}}{[\rho_{1+\lambda h/q}(z_0)]^\nu},\quad \nu=1,2,\ldots$$

В прямой теореме использовался полином из работ ([3], [7]):

$$P_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}J_{n,m}(\theta)\,d\theta\int_\Gamma f(\zeta)\sum_{p=1}^{k}\frac{(\zeta_{R,\theta}-\zeta)^{p-1}}{(\zeta_{R,\theta}-z)^p}\,d\zeta,$$

где

$$\zeta_{R,\theta}=\zeta_{R,\theta}(\zeta)=\psi(Re^{-i\theta}\varphi(\zeta)),\quad J_{n,m}=\frac{1}{\gamma_{n,m}}\left(\frac{\sin[n/m]\theta}{\sin\theta}\right)^m$$

$$\gamma_{n,m}=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin[n/m]\theta}{\sin\theta}\right)^m d\theta,$$

k и m выбираются достаточно большими.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Поступило 8 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. К. Дзядык, Третья летняя математическая школа, Киев, 1968. [2] В. К. Дзядык, Г. А. Алибеков, Матем. сборн., 75, № 4 (1968). [3] Н. А. Лебедев, Н. А. Широков, Изв. АН АрмССР, Математика, 6, № 4 (1971). [4] Н. А. Лебедев, П. М. Тамразов, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, № 6 (1970). [5] В. К. Дзядык, Изв. АН СССР, сер. матем., 27, № 5 (1963). [6] В. К. Дзядык, Укр. матем. журн., 20, № 5 (1968). [7] В. К. Дзядык, там же, 24, № 1 (1972). [8] П. М. Тамразов, Изв. АН СССР, сер. матем., 37, № 1 (1973). [9] В. К. Дзядык, Укр. матем. журн., 24, № 2 (1969).