Доклады Академии наук СССР
1974. Том. 214, № 1

УДК 512.52 *МАТЕМАТИКА*

Ю. Н. СУББОТИН

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И СПЛАЙНЫ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 17 V 1973)

Пусть на отрезке $[-1/2, 1/2]$ определена неубывающая функция $g(x)$ и последовательность $\{y_k\}$, удовлетворяющая условию

$$\|\Delta^n y_k\|_{l_p} \leqslant M, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \tag{1}$$

где $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ и $\Delta^n y_k = \Delta\Delta^{n-1} y_k$ и

$$\|y_k\|_{l_p} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |y_k|^p\right)^{1/p}; & 1 \leqslant p < \infty, \\ \sup\limits_k |y_k|, & p = \infty. \end{cases}$$

Спрашивается, существует ли такое число $C>0$, что для любой последовательности $\{y_k\}$, удовлетворяющей условию (1), существует функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} f(x+k)\, dg(x) = y_k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{2}$$

$$\|f^{(n)}(x)\|_{L_p} \leqslant C, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \tag{3}$$

где

$$\|f(x)\|_{L_p} = \begin{cases} \left(\int\limits_{-\infty} |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \sup\ |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Каково наименьшее C, при котором задача (1) — (3) разрешима, т. е. чему равна величина

$$A_{n,p}(M, g) = \sup_{Y \in \Delta^n_{M,p}} \inf_{f \in F(Y, g)} \|f^{(n)}(x)\|_{L_p}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty? \tag{4}$$

Здесь $Y = \{y_k\}$, $F(Y, g)$ — класс функций $\{f(x)\}$, имеющих локально абсолютно непрерывную $(n-1)$-ю производную и удовлетворяющих условию (2), и $\Delta^n_{M,p}$ — класс последовательностей Y, для которых выполнено (1).

Положим

$$\psi_{l,n}(u) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \sum_{s=0}^{n} (-1)^{n-s} C_n^s (s-l+1-u+v)_+^{n-1}\, dg(v), \tag{5}$$

$$(x-v)_+ = \max(x-v, 0),$$

$$\theta_n(u) = \sum_{l=0}^{n+1} (-1)^l \psi_{l,n}(u), \quad 0 \leqslant u \leqslant 1, \tag{6}$$

$$P_{\gamma_{2r-1}}(x,g)=\sum_{l=0}^{2r}x^l\int\limits_0^1|\theta_{2r-1}(u)|^{q-1}\operatorname{sign}\theta_{2r-1}(u)\psi_{l,2r-1}(u)\,du, \tag{7}$$

$$P_{\gamma_{2r}}(x,g)=\sum_{l=0}^{2r}x^l\left\{\int\limits_0^{1/2}|\theta_{2r}(u)|^{q-1}\operatorname{sign}\theta_{2r}(u)\psi_{l,2r}(u)\,du+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{1/2}^1|\theta_{2r}(u)|^{q-1}\operatorname{sign}\theta_{2r}(u)\psi_{l-1,2r}(u)\,du\right\},\quad 1/p+1/q=1,\quad 1\leqslant q<\infty. \tag{8}$$

Теорема 1. *Если все нули полинома $P_{\gamma n}(x, g)$ отрицательны и различны и $P_{\gamma n}(-1, g)\neq 0$, то*

$$A_{n,p}(M,g)=(n-1)!\,|P_{\gamma n}(-1,g)|^{-1/q},\quad 1/p+1/q=1,\quad 1<p\leqslant\infty. \tag{9}$$

Теорема 2. *Если $0<h\leqslant 1$ и $g^*(-{}^1/_2)=g^*(-h/2)=0$, $g^*(h/2)=g^*(1)=1$ и $g^*(x)$ линейна между указанными точками, то все нули полинома $P_{\gamma n}(x, g^*)$ отрицательны и различны и*

$$A_{n,p}(M,g^*)=(n-1)!\,|P_{\gamma n}(-1,g^*)|^{-1/q},\quad 1/p+1/q=1,\quad 1<p\leqslant\infty. \tag{10}$$

Теорема остается в силе и при $h=0$, только здесь $g^*(x)=0$ при $-{}^1/_2\leqslant x<0$ и $g^*(x)=1$ при $0\leqslant x\leqslant {}^1/_2$.

Ограниченность величины $A_{n,p}(M, g^*)$ при $h=0$ и $p=\infty$ впервые была доказана В. С. Рябеньким ([1]), см. также ([2]); С. Л. Соболев ([3]) показал, что метод Рябенького дает ограниченность $A_{n,p}(M, g^*)$ при $h=0$ и $1\leqslant p<\infty$. В работах автора ([4], [5]) дано точное значение величины $A_{n,p}(M, g^*)$ при $h=0$ и $1\leqslant p\leqslant\infty$. Позднее аналогичный результат был получен Шенбергом ([6]), но лишь при $p=1, 2$ и ∞. Доказательство теорем 1 и 2 протекает по той же схеме, что и в ([5]).

Определение 1. Функцию $S_n(x, h, h_1; f)$ будем называть **интерполяционным в среднем сплайном** для функции $f(x)$, если:

1) $S_n(x, h, h_1; f)$ имеет на $(-\infty, \infty)$ локально абсолютно непрерывную $(n-1)$-ю производную;

2) $$S_n^{(n)}(x,h,h_1;f)=Z_k,\quad kh+\frac{1+(-1)^n}{4}h\leqslant x<(k+1)h+\frac{1+(-1)^n}{4}h,$$

Z_k — константы;

3) $$\frac{1}{h_1}\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2}[f(kh+t)-S_n(kh+t,h,h_1;f)]\,dt=0,\quad 0\leqslant h_1\leqslant h,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

В последнем случае при $h_1=0$ считаем $f(x)$ непрерывной и требуем $f(kh)=S_n(kh, h, 0; f)$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$

Отметим, что с помощью таких сплайнов находится оценка сверху для величины $A_{n,p}(M, g^*)$ при $p=\infty$. Интерполяционные в среднем сплайны можно использовать для приближения функций, заданных на всей оси.

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ имеет локально абсолютно непрерывную $(k-1)$-ю производную, $1\leqslant k\leqslant n$, и k-я производная принадлежит $L_q(-\infty, \infty)$, то существует лишь один интерполяционный в среднем сплайн, удовлетворяющий условию*

$$\|f^{(i)}(x)-S_n^{(i)}(x,h,h_1;f)\|_{L_p(-\infty,\infty)}\leqslant C(i,n)\,h^{k-i+1/p-1/q}\,\omega(f^{(k)},h)_q, \tag{11}$$

$$i=0,1,\ldots,k,\quad 1\leqslant q\leqslant p\leqslant\infty,$$

где

$$\omega(f, h)_q = \sup_{|t|\leqslant h} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t)-f(x)|^q \, dx \right\}^{1/q}.$$

Если $f \in L_q(-\infty, \infty)$ *и* $h_1/h \geqslant \beta > 0$, β — *абсолютная постоянная, то неравенство* (11) *имеет место и при* $k=0$.

Теорема 4. *Если* 2π*-периодическая функция* $f(x)$ *имеет абсолютно непрерывную* $(k-1)$*-ю производную,* $1 \leqslant k \leqslant n$, *и* $h = 2\pi/m$, m — *натуральное, то существует единственный периодический интерполяционный в среднем сплайн* $S_n(x, 2\pi/m, h_1; f)$, $0 \leqslant h_1 \leqslant 2\pi/m$, *удовлетворяющий условию*

$$\|f^{(i)}(x) - S_n^{(i)}(x, 2\pi/m, h_1; f)\|_{L_p(0,2\pi)} \leqslant C(i, n) h^{\gamma - i} \omega(f^{(k)}, 2\pi/m)_{L_q(0,2\pi)}, \quad i=0, 1, \ldots, k, \tag{12}$$

где $\gamma = k$ *при* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ *и* $\gamma = k + 1/p - 1/q$ *при* $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$ *и*

$$\omega(f, h)_{L_q(0,2\pi)} = \sup_{|t|\leqslant h} \left\{ \int_0^{2\pi} |f(x+t)-f(x)|^q \, dx \right\}^{1/q}.$$

Теорема 4 при $h_1 = 0$, $p \geqslant \max(2, q)$ и нечетном n доказана Варгой и Шварцем ([7]) при более общих условиях на узлы интерполяции, а также для непериодических функций и сплайнов, удовлетворяющих определенным граничным условиям. Теорема 3 при $h_1 = 0$ анонсирована в работе автора ([8]).

Теорема 5. *Если функция* $f(x)$ *имеет непрерывную* k*-ю производную,* $0 \leqslant k \leqslant n$, *и*

$$\left| \Delta_h{}^n \frac{1}{h_1} \int_{-h_1/2}^{h_1/2} f(kh+t) \, dt \right| \leqslant M(h) < \infty, \quad 0 \leqslant h_1 \leqslant h,$$

то существует единственный сплайн, для которого имеет место неравенство

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |f^{(i)}(x) - S_n^{(i)}(x, h, h_1; f)| \leqslant C(i, n) \omega_{n+1-i}(f^{(i)}, h), \tag{13}$$

где $i = 0, 1, \ldots, k$; $\omega_s(f, h) = \sup\limits_{|t|\leqslant h} \sup\limits_{x} |\Delta_t{}^s f(x)|$.

При $h_1 = 0$ теорема 5 доказана в ([9]). В общем случае доказательство с небольшими изменениями протекает по той же схеме.

Институт математики и механики
Уральского научного центра
Академии наук СССР
Свердловск

Поступило
25 III 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. С. Рябенький, Об устойчивости конечно-разностных схем и о применении метода конечных разностей к решению задачи Коши для систем уравнений с частными производными, кандидатская диссертация, МГУ, 1952. [2] В. С. Рябенький, А. Ф. Филиппов, Об устойчивости разностных уравнений, М., 1956. [3] С. Л. Соболев, Лекции по теории кубатурных формул, ч. 2, Новосибирск, 1965. [4] Ю. Н. Субботин, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **78**, 19 (1965). [5] Ю. Н. Субботин, Там же, 88, 30 (1967). [6] I. J. Schoenberg, J. Approx. Theory, **2**, № 2, 167 (1969). [7] B. K. Swartz, R. S. Varga, ibid., **6**, 6 (1972). [8] Ю. Н. Субботин, ДАН, **195**, № 5, 1039 (1970). [9] С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин, Добавления к книге Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш, Теория сплайнов и ее приложения, М., 1972.