Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 3

УДК 531.391 *МЕХАНИКА*

Академик И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ, В. С. ЛОЩИНИН

К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИНАМИЧЕСКОГО КОЭФФИЦИЕНТА НЕРАВНОМЕРНОСТИ ДВИЖЕНИЯ МАШИННОГО АГРЕГАТА

1. Динамическая неравномерность движения машинных агрегатов в последние годы привлекает пристальное внимание исследователей, занятых динамическими расчетами, проектированием и конструированием машин, работающих в условиях форсированных режимов. Для ее описания на отдельных участках изменения обобщенной координаты ведущего звена может служить динамический коэффициент неравномерности $\delta(\varphi)$ хода машинного агрегата ([1]). Данная статья посвящена исследованию свойств динамического коэффициента неравномерности хода машинных агрегатов на предельных энергетических режимах.

Предполагается, что уравнение движения машинного агрегата приведено к виду

$$dT/d\varphi = M(\varphi, T), \tag{1}$$

причем:

1°) приведенный момент $M(\varphi, T)$ всех действующих сил является функцией, определенной и непрерывной в полосе

$$0 \leqslant T \leqslant T^*, \quad -\infty < \varphi < +\infty, \tag{2}$$

где T^* — максимально возможное значение кинетической энергии движения машинного агрегата, которое ему могут сообщить действующие силы;

2°) на границах полосы (2) выполняются неравенства

$$M(\varphi, 0) > 0, \quad M(\varphi, T^*) \leqslant 0;$$

3°) крутизна приведенного момента всех действующих сил непрерывна и отрицательна в полосе (2), $M_T'(\varphi, T) < 0$;

4°) приведенный момент $M(\varphi, T)$ имеет период ξ относительно угла поворота φ:

$$M(\varphi + \xi, T) = M(\varphi, T).$$

Приведенный момент инерции масс всех звеньев считается ξ-периодической функцией угла поворота φ звена приведения, $I = I(\varphi)$.

В рассматриваемых условиях крутизна приведенного момента всех действующих сил ограничена снизу и сверху некоторыми отрицательными константами ([2])

$$-\lambda_2 \leqslant M_T'(\varphi, T) \leqslant \lambda_1, \quad 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2. \tag{3}$$

2. Динамический коэффициент неравномерности движения машинного агрегата вдоль энергетического режима $T = T(\varphi)$ может быть записан в виде ([1])

$$\delta[T(\varphi)] = \delta[T(\varphi_0)] + {}^1/_2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \chi[T(z)]\,dz, \tag{4}$$

где $\delta[T(\varphi_0)]$ — значение, принимаемое им в положении $\varphi = \varphi_0$ ведущего вала, а $\chi[T(\varphi)]$ — характеристический критерий первого рода рассматриваемого режима ([3]).

В большинстве задач, выдвигаемых практикой, представляет интерес динамическая неравномерность хода лишь на каком-либо определенном участке исследуемого режима движения машинного агрегата. В качестве таких участков могут выступать промежутки разгона, либо торможения ведущего звена, либо отдельные участки рабочего цикла машины. Если $\varphi=\varphi_0$ — положение звена приведения, соответствующее началу * исследуемого участка режима $T=T(\varphi)$, то исходя из интегрального смысла динамического коэффициента неравномерности хода $\delta[T(\varphi)]$, естественно считать его начальное значение равным нулю:

$$\delta[T(\varphi_0)]=0. \tag{5}$$

В соответствии с этим условием интегральная неравномерность хода, накопленная ведущим звеном до положения $\varphi=\varphi_0$, не учитывается, а отсчет ее значений, начиная с положения $\varphi=\varphi_0$, для всех последующих положений ведущего звена ведется от нулевого значения $\delta[T(\varphi_0)]=0$, $0\leqslant T(\varphi_0)\leqslant T^*$.

3. В рассматриваемых условиях существует единственный периодический предельный режим $T=T_\xi(\varphi)$ движения машинного агрегата ([2]). Соответствующий ему динамический коэффициент неравномерности хода

$$\delta[T_\xi(\varphi)]=\delta[T_\xi(\varphi_0)]+{}^1/_2\int\limits_{\varphi_0}\chi[T_\xi(z)]\,dz={}^1/_2\ln\left[\frac{T_\xi(\varphi)}{T_\xi(\varphi_0)}\,\frac{I(\varphi_0)}{I(\varphi)}\right] \tag{6}$$

является также ξ-периодическим.

Отсюда следует, что приращение динамического коэффициента неравномерности хода машинного агрегата за любой полный цикл изменения угла поворота звена приведения равно нулю:

$$\Delta\delta=\delta[T_\xi(\varphi+\xi)]-\delta[T_\xi(\varphi)]={}^1/_2\int\limits_{\varphi}^{\varphi+\xi}\chi[T_\xi(z)]\,dz=0. \tag{7}$$

Таким образом, периодический режим $T=T_\xi(\varphi)$ характеризуется тем, что динамическая неравномерность хода, накопленная машинным агрегатом на участках разгона, полностью погашается неравномерностью, накопленной на участках торможения внутри рассматриваемого цикла $[\varphi, \varphi+\xi]$.

Пусть $T=T(\varphi)$ — любой энергетический режим, отличный от периодического, и

$$\delta[T(\varphi)]=\delta[T(\varphi_0)]+{}^1/_2\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\chi[T(z)]\,dz=\delta[T(\varphi_0)]+{}^1/_2\ln\left[\frac{T(\varphi)\cdot I(\varphi)}{T(\varphi_0)\cdot I(\varphi)}\right] \tag{8}$$

— ему соответствующий динамический коэффициент неравномерности хода.

В силу принятого условия (5)

$$\delta[T(\varphi_0)]=\delta[T_\xi(\varphi_0)]=0. \tag{9}$$

Поэтому

$$\delta[T(\varphi)]-\delta[T_\xi(\varphi)]={}^1/_2\int\limits_{\varphi}^{\varphi_0}\{\chi[T(z)]-\chi[T_\xi(z)]\}\,dz={}^1/_2\ln\left[\frac{T(\varphi)}{T(\varphi_0)}\,\frac{T_\xi(\varphi_0)}{T_\xi(\varphi)}\right]. \tag{10}$$

Из соотношений (7), (9) и (10) и результатов работы ([2]) вытекает

* Заметим, что $\varphi=\varphi_0$ может и не соответствовать началу движения машины.

Теорема 1. *За один полный цикл* $[\varphi_0, \varphi_0+\xi]$ *динамический коэффициент* $\delta[T(\varphi)]$ *неравномерности хода машинного агрегата вдоль режима* $T(\varphi)\neq T_\xi(\varphi)$ *получает отличное от нуля приращение*

$$\Delta\delta=\delta[T(\varphi_0+\xi)]-\delta[T(\varphi_0)]={}^1/_2\ln\frac{T(\varphi_0+\xi)}{T(\varphi_0)}, \tag{11}$$

причем

$$\Delta\delta>0\ (<0)\quad \text{при}\quad T(\varphi)<T_\xi(\varphi)\ \ (T(\varphi)>T_\xi(\varphi)).$$

Таким образом, в данном случае динамическая неравномерность, накопленная звеном приведения на участках разгона, не может полностью погаситься неравномерностью, получаемой им на участках торможения в пределах рассматриваемого цикла.

4. Рассмотрим теперь полный цикл $[\varphi, \varphi+\xi]$, отсчитываемый от текущего значения φ угла поворота звена приведения и соответствующее ему приращение

$$\Delta\delta[T(\varphi)]=\delta[T(\varphi+\xi)]-\delta[T(\varphi)]={}^1/_2\ln\frac{T(\varphi+\xi)}{T(\varphi)} \tag{12}$$

динамического коэффициента неравномерности хода машинного агрегата в режиме $T=T(\varphi)$. По мере перемещения цикла $[\varphi, \varphi+\xi]$ приращение $\Delta\delta[T(\varphi)]$, в отличие от $\Delta\delta[T_\xi(\varphi)]\equiv 0$, будет изменяться. Пользуясь соотношением (7), представим его в виде

$$\Delta\delta[T(\varphi)]={}^1/_2\int\limits_{\varphi}^{\varphi+\xi}\{\chi[T(z)]-\chi[T_\xi(z)]\}dz.$$

Отсюда получим

$$|\Delta\delta[T(\varphi)]|\leqslant{}^1/_2\int\limits_{\varphi}^{\varphi+\xi}|\chi[T(z)]-\chi[T_\xi(z)]|dz. \tag{13}$$

Исходя из данного неравенства и асимптотических свойств ([4]) характеристического критерия $\chi[T(\varphi)]$, можно убедиться в том, что здесь справедлива

Теорема 2. *На любом достаточно удаленном полном цикле* $[\varphi, \varphi+\xi]$ *приращение* $\Delta\delta[T(\varphi)]$ *динамического коэффициента неравномерности хода машинного агрегата в режиме* $T=T(\varphi)$, *определяемом начальными условиями* $0\leqslant T(\varphi_0)\leqslant\tau^*$, $\tau^*=\sup\limits_{|\varphi|<\infty}\tau(\varphi)$, *становится как угодно малым;*

$$|\Delta\delta[T(\varphi)]|=|\delta[T(\varphi+\xi)]-\delta[T(\varphi)]|={}^1/_2\left|\ln\frac{T(\varphi+\xi)}{T(\varphi)}\right|<\varepsilon \tag{14}$$

при всех значениях угла поворота φ *звена приведения, удовлетворяющих неравенству*

$$\varphi>\varphi_0+\frac{1}{\lambda_1}\ln\left[\left(1+\frac{\lambda_2\tau^*\xi}{2\varepsilon\tau_*}\right)\frac{\tau^*}{\tau_*}\right]; \tag{15}$$

здесь ε — *произвольно малое положительное число, а* $T=\tau(\varphi)$ — *инерциальная кривая* ([2]) *движения машинного агрегата.*

Этот результат получает естественную интерпретацию: по мере роста угла поворота φ звена приведения энергетический режим $T=T(\varphi)$ безгранично приближается к периодическому режиму $T=T_\xi(\varphi)$; поэтому по истечении достаточно большого промежутка переходного процесса динамическая неравномерность, накопленная ведущим звеном за любой полный цикл $[\varphi, \varphi+\xi]$, делается как угодно близкой к нулю.

Асимптотические свойства динамического коэффициента неравномерности хода $\delta[T(\varphi)]$ по отношению к $\delta[T_\xi(\varphi)]$ выражает следующая

Теорема 3. *При безграничном росте угла поворота φ звена приведения существует конечный предел*

$$\lim_{\varphi\to\infty}\{\delta[T(\varphi)]-\delta[T_\xi(\varphi)]\}={}^1/_2\ln\left[\frac{T_\xi(\varphi_0)}{T(\varphi_0)}\right] \tag{16}$$

разности между динамическими коэффициентами неравномерности хода машинного агрегата в режимах $T=T(\varphi)$ *и* $T=T_\xi(\varphi)$ *соответственно.*

Справедливость этого предельного соотношения вытекает из равенства (10) и результатов статьи ([2]).

Следствие. *Для всех, достаточно больших значений угла поворота φ звена приведения можно положить*

$$\delta[T(\varphi)]\doteq\delta[T_\xi(\varphi)]+{}^1/_2\ln\left[\frac{T_\xi(\varphi_0)}{T(\varphi_0)}\right]. \tag{17}$$

Пусть $T=T_1(\varphi)$ и $T=T_2(\varphi)$ — энергетические режимы, определяемые любыми начальными условиями

$$T_1(\varphi_0)\neq T_2(\varphi_0),\quad 0\leqslant T_{1,2}(\varphi_0)\leqslant T^*.$$

В силу свойства единственности $T_1(\varphi)\neq T_2(\varphi)$ при всех значениях $\varphi\geqslant\varphi_0$.

Теорема 4. *В рассматриваемых условиях не существует двух различных режимов движения машинного агрегата с тождественно равными динамическими коэффициентами неравномерности хода, т. е. из неравенства*

$$T_1(\varphi)\neq T_2(\varphi),\quad \varphi_0\leqslant\varphi<+\infty,$$

вытекает соотношение

$$\delta[T_1(\varphi)]\neq\delta[T_2(\varphi)],\quad \varphi_0\leqslant\varphi<+\infty.$$

Полученный результат, как нам кажется, имеет существенное практическое значение.

Поступил
28 IV 197

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. И. Артоболевский, ДАН, 87, № 3 (1952). [2] В. С. Лощинин, Т Инст. машиноведения, Семинар по теории машин и механизмов, 23, в. 91, Изд. А СССР, 1961. [3] И. И. Артоболевский, Изв. АН СССР, ОТН, № 12 (1952). [4] I. Artobolevsky, V. S. Loshchinin, J. Mechanisms, 5 (1970).