

Р. С. САКС

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ, ПРИВОДИМЫХ К ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 12 II 1973)

Пусть D — ограниченная диффеоморфная шару область n -мерного евклидова пространства с границей L класса $A^{2, \alpha}$, $0 < \alpha < 1$. В области D изучается система дифференциальных уравнений

$$d\omega + \lambda * \omega = \gamma \quad (1)$$

относительно неизвестной дифференциальной формы ω класса $C^{2, \alpha}(\bar{D})$ при заданной форме γ из этого же класса с точки зрения возможности постановки для нее корректных краевых задач. Здесь d — оператор внешнего дифференцирования, который, как известно ^(1, 2), является дифференциальным оператором первого порядка первой степени, т. е. повышает степень формы на единицу, $*$ — однозначно обратимый оператор нулевого порядка, переводящий формы степени k в формы степени $n-k$, постоянная $\lambda \neq 0$.

Разлагая формы ω и γ в сумму форм ω^k и γ^k степени k , легко видеть, что система (1) распадается на ряд подсистем

$$(d + \lambda *) (\omega^k + \omega^{n-k-1}) = \gamma^{k+1} + \gamma^{n-k-1}, \quad (1_k)$$

$$k=0, 1, \dots, \left[\frac{n-1}{2} \right] \text{ и уравнение } \lambda * \omega^n = \gamma^0.$$

Системы (1) и (1_k) не являются эллиптическими, однако их характеристические матрицы имеют постоянный ранг.

При $\lambda=0$ очевидно, что при любых краевых условиях на ω нельзя получить корректную краевую задачу для системы (1) или (1_k) .

В работе ⁽³⁾ система (1) с $\lambda=1$ рассматривалась как пример системы, приводимой к эллиптической; там показано, что на римановом многообразии без края она задает нётеров оператор в соответствующих пространствах. Краевые задачи для системы (1_k) с $\lambda \neq 0$ при $k=1$, $n=3$ изучались в работах автора.

Напомним, что система называется приводимой к эллиптической ⁽³⁾, если: 1⁰) ее характеристическая матрица имеет постоянный ранг, 2⁰) имеется оператор, аннулирующий ее старшую часть (в (1) это снова d , так как $d^2=0$), и 3⁰) уравнение вместе со следствием, получаемым применением этого оператора, образует эллиптическую (хотя и переопределенную) систему. Для системы (1) таким следствием является уравнение

$$\delta \omega = \hat{\gamma}, \quad \hat{\gamma} = -\lambda^{-1} w *^{-1} d\gamma, \quad (2)$$

где $\delta \varphi = *^{-1} d * w \varphi$, а $w \varphi^p = (-1)^p \varphi^p \quad \forall p$.

Система (1) вместе с (2) образует эллиптическую систему, так как известно, что оператор $d + \delta$ эллиптивен ⁽²⁾, и любое решение (1), (2) является решением системы

$$(d + \delta) \omega + \lambda * \omega = \gamma + \hat{\gamma}. \quad (3)$$

Кроме того, легко видеть, что решение системы (1) класса $C^{2, \alpha}(\bar{D})$ удов-

летворяет эллиптической системе второго порядка

$$(-\Delta - \lambda^2 w) \omega = \bar{\gamma}, \quad \bar{\gamma} = d\gamma + \delta\gamma - \lambda * w\gamma, \quad (4)$$

где $-\Delta\varphi = (d\delta - \delta d)\varphi$, $w\varphi^p = (-1)^{(p+1)(n-p)}\varphi^p \quad \forall p$.

Аналогично, решение системы (1_k) удовлетворяет уравнениям

$$\delta\varphi^p = \gamma^{p-1}, \quad (2_k)$$

$$p = k, n - k - 1,$$

$$(-\Delta - \lambda^2 w) \omega^p = \bar{\gamma}^p, \quad (4_k)$$

и, следовательно, она приводима к эллиптической.

Отметим, что любая составляющая ω^k или ω^{n-k-1} решения системы (1_k) удовлетворяет эллиптической системе (2_k) , (4_k) , переопределенной при $k > 0$. Краевые задачи для таких однородных систем с $\lambda = 0$ изучались в работах ^(4, 5). Наша цель — показать, что у систем (1) и (1_k) имеются различные нетривиальные краевые задачи. Для этого вначале исследуем систему (1_k) .

1. Некоторые связи между составляющими решения системы (1_k) .

Лемма 1. Пусть, скажем, ω^k — форма класса $C^{3, \alpha}(\bar{D})$, удовлетворяющая эллиптической системе (2_k) , (4_k) , $n \neq 2k + 1$; тогда $\omega^{n-k-1} = \lambda^{-1} *^{-1} \times (\gamma^{k+1} - d\omega^k)$ вместе с ω^k образуют решение системы (1_k) класса $C^{2, \alpha}(\bar{D})$.

Рассмотрим систему (1_k) при $n = 2k + 1$:

$$(d + \lambda *) \omega^k = \gamma^{k+1}. \quad (5)$$

Предположим, что область D : а) выпукла по направлению оси x_n , б) D содержит поверхность S , не касающуюся прямых, параллельных оси x_n , ни в одной точке и заданную уравнением $x_n = s(x')$, $s(x') \in C^{2, \alpha}(\bar{\Omega})$, где Ω — проекция области D на плоскость $x_n = 0$.

Выделяя дифференциал dx_n , формы ω и γ можно представить через формы, не содержащие dx_n , в виде: $\omega^k = \varphi_1^k + \varphi_2^{k-1} \wedge dx_n$, $\gamma^{k+1} = \gamma_1^{k+1} + \gamma_2^k \wedge dx_n$. Операторы d и $*$ также выражаются через операторы d' и $*'$, действующие в $\mathbb{R}^{n-1}$, и $\partial_n = \partial/\partial x_n$: $d\omega = d'\varphi_1 + (w \partial_n \varphi_1 + d'\varphi_2) \wedge dx_n$, $*\omega = w *' \varphi_2 + (*' \varphi_1) \wedge dx_n$.

Поэтому уравнение (5) можно записать в виде

$$d'\varphi_1 + \lambda w *' \varphi_2 - \gamma_1 = 0, \quad (6)$$

$$\partial_n \varphi_1 + \lambda w *' \varphi_1 + w d' \varphi_2 = w \gamma_2. \quad (7)$$

Если $\omega \in C^{2, \alpha}(\bar{D})$, то следствием (5) являются уравнения

$$\delta' \varphi_1 - w \partial_n \varphi_2 = \bar{\gamma}_1,$$

$$\delta' \varphi_2 = \bar{\gamma}_2, \quad \bar{\gamma}_2 = \lambda^{-1} w *' d' \gamma_1, \quad (8)$$

— аналог уравнения (2_k) , а также уравнения

$$(-\Delta + \lambda^2 w) \varphi_1 = \bar{\gamma}_1, \quad (9)$$

$$(-\Delta - \lambda^2 w) \varphi_2 = \bar{\gamma}_2.$$

Лемма 2. Пусть область D удовлетворяет условиям а) и б), а форма $\varphi_2^{k-1} \wedge dx_n$ удовлетворяет в области D уравнениям (8), (9).

Тогда существует форма φ_1^k , не содержащая dx_n и такая, что $\omega^k = \varphi_1^k + \varphi_2^{k-1} \wedge dx_n$ является решением системы (5). Форма φ_1^k определяется по φ_2^{k-1} с точностью до слагаемого вида

$$(2a)^{-1} [(a+A)e^{-ax_n} + (a-A)e^{ax_n}] \psi_0^k(x'), \quad (10)$$

где $a = \lambda w^{1/2}$, $A = \lambda w *'$, а ψ_0^k — произвольное решение системы

$$d' \psi(x') = 0, \quad \delta' \psi(x') = 0, \quad x' \in \Omega. \quad (11)$$

Доказательство. Пусть $\varphi_2^{k-1} \in C^{0,\alpha}(\bar{D})$ задана, $\bar{\varphi}_1^k$ — частное решение уравнения (7), обращающееся в нуль на S , тогда общее решение уравнения (7) имеет вид

$$\varphi_1^k(x) = (2a)^{-1} [(a+A)e^{-ax_n} + (a-A)e^{ax_n}] \psi^k(x') + \bar{\varphi}_1^k(x), \quad (12)$$

где ψ^k — произвольная форма от $x' \in \Omega$ класса $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, которая однозначно определяется значениями $\varphi_1^k(x)$ на S .

Обозначим через $\Theta(x)$ левую часть уравнения (6). Тогда оказывается, если φ_2 удовлетворяет уравнениям (8), (9), а φ_1 — уравнению (7), то $(\partial_n^2 - a^2)\Theta(x) = 0$ и, следовательно, Θ представима в виде $\Theta(x) = \Theta_1(x')e^{-ax_n} + \Theta_2(x')e^{ax_n}$ через Θ_1 и Θ_2 , которые однозначно определяются значениями Θ и $\partial_n \Theta$ на S . Подставляя теперь (12) в (6), получим, что уравнение (6) выполняется тогда и только тогда, когда $\psi^k(x')$ удовлетворяет эллиптической системе

$$d'\psi^k = \alpha(x'), \quad \delta'\psi^k = \beta(x'), \quad x' \in \Omega, \quad (13)$$

где α и β — вполне определенные функции ψ_2^{k-1} , причем $d'\alpha = 0$, $\delta'\beta = 0$.

Пусть $\bar{\psi}^k(x')$ — частное решение системы (13), а $\psi_0^k(x')$ — произвольное решение однородной системы (11), подставляя их в формулу (12), получим утверждение леммы.

Аналогичное утверждение справедливо также для системы $d\varphi = \alpha$, $\delta\varphi = \beta$, если $d\alpha = 0$, $\delta\beta = 0$.

2. Системы (1) и (1_k) при $2k+3 \neq n$, следуя работам (6, 7), можно привести к определенным эллиптическим системам с дополнительными краевыми условиями **специального вида**.

Лемма 3. Уравнение (1) на решениях класса $C^{3,\alpha}(\bar{D})$ эквивалентно эллиптической системе

$$-\Delta\omega + \lambda\delta*\omega = \delta\gamma + d\hat{\gamma} \quad (14)$$

с краевыми условиями вида

$$t(d\omega + \lambda*\omega - \gamma) = 0, \quad t(\delta\omega - \hat{\gamma}) = 0 \text{ на } L, \quad (15)$$

где $t\varphi$ — касательная компонента формы φ .

Система (1_k) включается в эллиптическую систему

$$(d+\delta)\varphi + \Lambda*\varphi = \gamma_k, \quad (16)$$

где $\varphi = \sum_{j=0}^n \varphi^j$, $\Lambda*\varphi = \lambda*(\varphi^k + \varphi^{n-k-1})$, $\gamma_k = \sum_{j=0}^n \bar{\gamma}^j$, причем $\bar{\gamma}^j$ при $j=k+1$, $n-k$

совпадают с правой частью (1_k) , а при $j=k-1$, $n-k-2$ — с правой частью (2_k) , остальные произвольны.

Если φ удовлетворяет системе (16) и краевым условиям

$$t\varphi^p|_L = 0, \quad p=k-1, n-k-3; \quad t*\varphi^q|_L = 0, \quad q=k+2, n-k+1, \quad (17)$$

то система (16) распадается на систему (1_k) и систему

$$\begin{aligned} d\varphi^p + \delta\varphi^{p+2} &= \gamma^{p+1}, \quad p=0, 1, \dots, n; \quad p \neq k-2, k, n-k-3, n-k-1, \\ d\varphi^p &= 0, \quad p=k-2, n-k-3, \\ \delta\varphi^p &= 0, \quad p=k+2, n-k+1. \end{aligned} \quad (18)$$

Лемма 4. Пусть дополнительно к (17) решение системы (18) удовлетворяет таким краевым условиям, что полученная краевая задача имеет единственное, скажем при $\gamma^{p+1} = 0$, только тривиальное решение; тогда система (1_k) на решениях класса $C^{2,\alpha}(\bar{D})$ эквивалентна эллиптической системе (16) со специальной правой частью и с дополнительными краевыми условиями.

Таковыми краевыми условиями при $n=2k+2l+2$, $l \geq 0$, могут быть условия

$$\begin{aligned} t\varphi^p|_L=0, \quad p=k-2, k-4, \dots; \quad k+2l-1, k+2l-3, \dots, k+1, k-1, \dots, \\ t^*\varphi^p|_L=0, \quad p=k+2, k+4, \dots; \quad k+2l+3, k+2l+5, \dots \end{aligned} \quad (19)$$

При нечетном n систему (1_k) естественно включать в эллиптическую систему вида (16), содержащую либо только четные, либо только нечетные компоненты формы φ , тогда система (18) также будет содержать только такие компоненты. Она опять будет иметь только тривиальное решение, если задать при $n=2k+1$

$$t\varphi^p|_L=0, \quad p=k-2, k-4, \dots; \quad t^*\varphi^p|_L=0, \quad p=k+2, k+4, \dots$$

а при $n=2k+2l+1$, $l \geq 2$, фиксируя m , $1 \leq m \leq l-1$, условия

$$\begin{aligned} t\varphi^p|_L=0, \quad p=k+2l-2, k+2l-4, \dots, k+2m, k-2, k-4, \dots, \\ t^*\varphi^p|_L=0, \quad p=k+2, k+4, \dots, k+2m, k+2l+2, k+2l+4, \dots \end{aligned}$$

3. Рассмотрим следующие краевые задачи.

Задача I. Найти в области D решение системы (1_k) , $2k+1 \neq n$, класса $C^{2,\alpha}(\bar{D})$, удовлетворяющее краевому условию

$$\beta\omega^p=\theta^p \text{ на } L, \quad p=k \text{ либо } p=n-k-1, \quad (20)$$

где заданы: β — дифференциальный оператор первого порядка нулевой степени и форма $\theta^p \in C^{2,\alpha}(L)$.

Из леммы 1 получается

Теорема 1. Задача I эквивалентна краевой задаче (20) для переопределенной эллиптической системы (2_k) , (4_k) в классе $C^{3,\alpha}(\bar{D})$.

Задача II. Найти решение системы (5) класса $C^{2,\alpha}(\bar{D})$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\beta\varphi_2^{k-1} \wedge dx_n = \theta \text{ на } L, \quad (21)$$

$$\beta'\varphi_1^k = \sigma \text{ на } L' \subset L, \quad (22)$$

где β и β' — заданные дифференциальные операторы в D и на S соответственно, формы θ и σ класса $C^{2,\alpha}$ заданы на L и L' , а L' — край S .

Из леммы 2 вытекает

Теорема 2. Задача II эквивалентна краевой задаче (21) для эллиптической системы (8), (9) и краевой задаче для эллиптической системы (11), полученной из (12) и (22).

Из леммы 3 получается

Теорема 3. Краевая задача для системы (1) эквивалентна на решениях класса $C^{3,\alpha}(\bar{D})$ краевой задаче для системы (14) с дополнительными краевыми условиями (15).

Аналогичное утверждение вытекает из леммы 4.

Приведенные теоремы позволяют указать для системы (1) различные неётеровы краевые задачи. Детально краевые задачи для систем (1) и (1_k) будут рассмотрены в другом сообщении.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
18 I 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ж. Де Рам, Дифференцируемые многообразия, ИЛ, 1956. ² Л. Шварц, Комплексные многообразия, Эллиптические уравнения, М., 1964. ³ Б. Р. Вайнберг, В. А. Грушин, Матем. сборн., 72 (114), № 4 (1967). ⁴ W. V. D. Hodge, Proc. Lond. Math. Soc., ser. 2, 36 (1933). ⁵ G. Duff, D. Spencer, Ann. Math., 56, № 1 (1952). ⁶ Е. С. Зуховицкая, ДАН, 201, № 3 (1971). ⁷ И. С. Гудович, С. Г. Крейн, Матем. сборн., 84, № 4 (1971). ⁸ Р. С. Сакс, ДАН, 199, № 5 (1971). ⁹ Р. С. Сакс, Дифференциальные уравнения, 8, № 1 (1972).