

В. Е. БАЛАБАЕВ

КВАТЕРНИОННЫЙ АНАЛОГ СИСТЕМЫ КОШИ — РИМАНА В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ КОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 25 V 1973)

Регулярные кватернионные функции, т. е. кватернионные функции, удовлетворяющие уравнениям, аналогичным уравнениям Коши — Римана, изучались в работах ряда авторов (¹⁻⁶). Ряд работ посвящен многочисленным приложениям регулярных кватернионных функций — в физике: в квантовой механике (⁷), теории электромагнитного поля (⁸), — а также в различных областях математики: в теории аналитических функций (⁴), функциональном анализе (⁹), уравнениях с частными производными (⁵).

Все предыдущие исследования касались в основном случая одного кватернионного переменного, т. е. для функций в $\mathbb{C}^2$, а изучение подобных функций в пространствах большей размерности оставалось вне поля зрения. В настоящей работе мы рассматриваем кватернионный аналог системы Коши — Римана в $\mathbb{C}^4$ и находим некоторые его приложения в комплексном анализе.

Комплексное пространство $\mathbb{C}^4$ переменных z_1, w_1, z_2, w_2 с введенной кватернионной структурой

$$p = z_1 + w_1 j, \quad q = z_2 + w_2 j$$

будем обозначать через $Q_{p,q}^2$. Ориентация в $Q_{p,q}^2$ выбирается так, чтобы для любой области $D \subset Q_{p,q}^2$

$$\int_D dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge dw_1 \wedge d\bar{w}_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_2 \wedge dw_2 \wedge d\bar{w}_2 > 0.$$

Рассмотрим гиперкомплексные дифференциальные операторы

$$\mathcal{D}_p = {}^{1/2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + \frac{\partial}{\partial w_1} j \right), \quad \mathcal{D}_q = {}^{1/2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} + \frac{\partial}{\partial w_2} j \right),$$

где j — единица алгебры кватернионов.

Однозначную кватернионную функцию $f = g + hj$, гладкую на открытом множестве $D \subset Q_{p,q}^2$ назовем (p, q) -гиперголоморфной на D , если она в каждой точке $(p, q) \in D$ удовлетворяет уравнениям

$$\mathcal{D}_p f = 0, \quad j \mathcal{D}_q' = 0,$$

или в комплексной записи

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_1} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial w_1}, \quad \frac{\partial h}{\partial \bar{z}_1} = -\frac{\partial \bar{g}}{\partial w_1}, \quad \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_2} = \frac{\partial h}{\partial w_2}, \quad \frac{\partial g}{\partial \bar{w}_2} = -\frac{\partial h}{\partial z_2}.$$

В отличие от регулярных кватернионных функций в $\mathbb{C}^2$ эта система уравнений переопределена. Можно проверить, что обычные голоморфные функции переменных z_1, w_1, z_2, w_2 принадлежат классу (p, q) -гиперголоморфных функций. Совокупность (p, q) -гиперголоморфных функций в области D образует пространство над полем действительных чисел, которое мы будем обозначать $H_{p,q}(D)$. Можно показать, что многие свойства голо-

морфных функций нескольких переменных справедливы и для (p, q) -гиперголоморфных функций, в частности, для них могут быть установлены теорема единственности, принцип максимума модуля, неравенства Коши, теорема Лиувилля и другие.

1. Интегрирование (p, q) -гиперголоморфных функций. Введем в $\mathbb{C}^4$ две кватернионные формы

$$\omega'(p) = *dz_1 + *d\bar{w}_1j, \quad \omega''(q) = *dz_2 + *dw_2j,$$

где $*$ — оператор Ходжа ⁽¹⁰⁾.

Предложение 1. Если функция $f(p, q)$ -гиперголоморфна в области $G \subset Q_{p,q}^2$, то для любой области $D \subset\subset G$ с кусочно-гладкой границей ∂D

$$\int_{\partial D} \omega'(p) \cdot f = \int_D f \cdot \omega''(q) = 0.$$

Предложение 2. Пусть функция f непрерывна в области $D \subset Q_{p,q}^2$ и для любого шара $B \subset\subset D$

$$\int_{\partial B} \omega'(p) \cdot f = \int_B f \cdot \omega''(q) = 0. \quad (1)$$

Тогда $f(p, q)$ -гиперголоморфна в D .

Предложение 3. Если комплекснозначная функция f непрерывна в области $D \subset \mathbb{C}^4$ и для любого шара $B \subset\subset D$ выполнено условие (1), то функция f голоморфна в D .

Отличие этого утверждения от обычной теоремы Мореры в том, что мы требуем равенства нулю интегралов по границам восьмимерных шаров. В обычной теореме Мореры требуется равенство нулю интегралов по границам пятимерных областей специального вида (см., например, ⁽¹¹⁾, стр. 335).

Пусть $D' \subset\subset \mathbb{C}_{z_1, w_1}^2$ и $D'' \subset\subset \mathbb{C}_{z_2, w_2}^2$ — ограниченные области с кусочно-гладкой границей и $\Gamma = \partial D' \times \partial D''$. Рассмотрим две кватернионные формы $\Lambda(\xi, p)$ и $\chi(\xi, q)$;

$$\Lambda(\xi, p) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{[-(\bar{\lambda}_1 - \bar{z}_1) + (\bar{\mu}_1 - \bar{w}_1)j]}{|\xi - p|^4} (d\lambda_1 \wedge d\mu_1 \wedge d\bar{\mu}_1 - d\lambda_1 \wedge d\bar{\lambda}_1 \wedge d\bar{\mu}_1j),$$

$$\chi(\xi, q) = \frac{1}{4\pi^2} (d\lambda_2 \wedge d\mu_2 \wedge d\bar{\mu}_2 + d\lambda_2 \wedge d\bar{\lambda}_2 \wedge d\mu_2j) \frac{[-(\bar{\lambda}_2 - \bar{z}_2) + (\mu_2 - w_2)j]}{|\xi - q|^4},$$

где $\xi = \lambda_1 + \mu_1j$, $\xi = \lambda_2 + \mu_2j$.

Предложение 4. Пусть функция $f(p, q)$ (p, q) -гиперголоморфна в области $D' \times D'' \subset\subset Q_{p,q}^2$ и непрерывна в $\bar{D}' \times \bar{D}''$. В этом случае для всех $(p, q) \in D' \times D''$

$$f(p, q) = \int_{\Gamma} \Lambda(\xi, p) f(\xi, \xi) \chi(\xi, q).$$

Рассмотрим теперь кватернионную форму θ_j :

$$\theta_j(\xi, \xi; p, q) = \{[\bar{\lambda}_1 - \bar{z}_1] - (\bar{\mu}_1 - \bar{w}_1)j\} \omega'(\xi) f(\xi, \xi) + \\ + f(\xi, \xi) \omega''(\xi) [(\bar{\lambda}_2 - \bar{z}_2) - (\mu_2 - w_2)j] \{|\xi - p|^2 + |\xi - q|^2\}^{-4}.$$

Предложение 5. Пусть $D \subset\subset Q_{p,q}^2$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей ∂D и f — гладкая в $\bar{D}$ кватернионная функция.

Тогда верна формула

$$\frac{3}{\pi_4} \left[\int_{\partial D} \theta_j - \int_D d\theta_j \right] = \begin{cases} f(p, q), & \text{если } (p, q) \in D, \\ 0, & \text{если } (p, q) \notin \bar{D}, \end{cases} \quad (2)$$

где $d\theta_j$ — внешний дифференциал формы θ_j .

Когда f — (p, q) -гиперголоморфная функция в D , второй член в формуле (2) пропадает и мы получаем следующее интегральное представление (p, q) -гиперголоморфных функций:

$$\frac{3}{\pi^4} \int_{\partial D} \theta_f(\xi, \bar{\xi}; p, q) = \begin{cases} f(p, q), & \text{если } (p, q) \in D, \\ 0, & \text{если } (p, q) \notin \bar{D}. \end{cases} \quad (3)$$

Формула (3) как частный случай включает в себя интегральное представление Мартинелли — Бохнера для голоморфных функций в $\mathbb{C}^4$ ⁽¹¹⁾.

2. Вопросы (p, q) -гиперголоморфного продолжения. Можно показать, что для (p, q) -гиперголоморфных функций справедливы аналоги теорем Осгуда — Брауна о стирании компактных особенностей и Хартогса о голоморфном продолжении ⁽¹⁴⁾. В частности, кватернионный аналог теоремы Хартогса позволяет получить в качестве следствия следующее утверждение о голоморфном продолжении в $\mathbb{C}^4$.

Предложение 6. Пусть $D' \subset \subset \mathbb{C}_{z_1, w_1}^2$ и $D'' \subset \subset \mathbb{C}_{z_2, w_2}^2$ — ограниченные области с кусочно-гладкими границами $\partial D'$ и $\partial D''$ и точка $(z_1^0, w_1^0) \in D'$, и пусть $U(z_1^0, w_1^0) \subset D'$ — некоторая окрестность точки (z_1^0, w_1^0) .

Тогда любая функция $f(z_1, w_1, z_2, w_2)$, 1) голоморфная в области $U(z_1^0, w_1^0) \times D''$ и непрерывная по z_2, w_2 в $\bar{D}''$ при любых $(z_1, w_1) \in U(z_1^0, w_1^0)$, 2) голоморфная в D' и непрерывная в $\bar{D}'$ по z_1, w_1 для любых $(z_2, w_2) \in \partial D''$, 3) непрерывная на $\partial D' \times \partial D''$, голоморфно продолжается в область $D' \times D''$.

В предложении 6 комплексные размерности областей D' и D'' , равные двум, отличаются от размерностей соответствующих областей в обычной теореме Хартогса.

При описании естественных областей определения (p, q) -гиперголоморфных функций удается установить аналог теоремы Картана — Туллена об одновременном продолжении ⁽¹²⁾ и таким образом получить теорему Бенке — Штейна (см. ⁽¹¹⁾, стр. 370) для (p, q) -гиперголоморфных функций. Кроме того для (p, q) -гиперголоморфных функций справедлив следующий аналог принципа непрерывности Бремермана ⁽¹³⁾.

Предложение 7. Пусть S_α и T_α ($\alpha=1, 2, \dots$) — последовательности множеств, для которых имеет место принцип максимума модуля для функций, (p, q) -гиперголоморфных в области $D \subset Q_{p, q}^2$, $S_\alpha \cap T_\alpha = \emptyset$, $S_\alpha \cup T_\alpha \subset \subset D$, $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} S_\alpha = S$ ограничено, $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} T_\alpha = T \subset \subset D$.

Тогда любая функция f , (p, q) -гиперголоморфная в D , (p, q) -гиперголоморфно продолжается в некоторую окрестность S .

Автор выражает глубокую благодарность проф. Б. В. Шабату и Р. Х. Кристалинскому за внимание к работе и ценные замечания.

Смоленский государственный педагогический институт
им. К. Маркса

Поступило
7 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ G. C. Moisil, Bull. Sci. Math., S II, 55, 168 (1931). ² R. Fueter, C. R. Congres int. Math., 1, 75 (1937). ³ А. В. Бицадзе, Изв. АН СССР, сер. матем., 17, № 6, 525 (1953). ⁴ В. С. Виноградов, ДАН, 154, № 1, 16 (1964). ⁵ В. С. Виноградов, Исследование граничных задач для эллиптических систем первого порядка. Докторская диссертация, М., 1972. ⁶ Мухаммед-Насер, Сиб. матем. журн., 12, № 6, 1327 (1971). ⁷ D. Ivanenko, K. Nikolsky, Zs. Phys., 63, 1/2, 129 (1930). ⁸ Ю. С. Маврычев, Изв. высш. учебн. завед., физика, № 11, 157 (1972). ⁹ П. Левин, Конкретные проблемы функционального анализа, М., 1967. ¹⁰ Чженъ Шен-шень, Комплексные многообразия, М., 1961. ¹¹ Б. В. Шабат, Введение в комплексный анализ, М., 1969. ¹² H. Cartan, P. Thullen, Math. Ann., 106, 617 (1932). ¹³ H. J. Bremerman, Trans. Am. Math. Soc., 82, 17 (1956).