Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 3

УДК 517.948.35

МАТЕМАТИКА

А. В. ГОНЧАРСКИЙ, А. С. ЛЕОНОВ, А. Г. ЯГОЛА

О ПРИНЦИПЕ НЕВЯЗКИ ПРИ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 12 VI 1973)

1. Пусть Z и U — банаховы пространства, а H — компактно вложенное в Z гильбертово пространство. Рассмотрим некорректную задачу

$$Az=u, \quad z\in Z, \quad u\in U, \tag{1}$$

где A — непрерывный из Z в U, вообще говоря, нелинейный оператор. Пусть правой части $\bar{u}\in U$ отвечает единственное решение $\bar{z}\in H$. Будем считать, что вместо точной правой части (1) $\bar{u}$ задана $\tilde{u}_\delta\in U$ такая, что

$$\|\bar{u}-\tilde{u}_\delta\|_U\leqslant\delta, \quad 0<\delta\leqslant\delta_0. \tag{2}$$

Требуется построить регуляризующий по Тихонову алгоритм ([1]) решения задачи (1), (2).

Одним из наиболее распространенных и эффективных алгоритмов приближенного решения этой задачи является алгоритм, основанный на минимизации функционала Тихонова

$$M^\alpha[z]=\alpha\|z\|_H^2+\|Az-\tilde{u}_\delta\|_U^2, \quad \alpha>0, \quad z\in H, \tag{3}$$

обоснованный в ([2]). В связи с этим встает важный вопрос о конструктивном выборе параметра регуляризации α. В случае линейных задач этот выбор может быть осуществлен по принципу невязки ([3,4]): искомое значение $\alpha(\delta)$ есть решение уравнения

$$\|Az_\delta^\alpha-\tilde{u}_\delta\|_U=\delta, \tag{4}$$

где z_δ^α — экстремаль функционала (3) для данного α и фиксированного δ. Однако для нелинейных задач принцип невязки до сих пор не обоснован. Ниже показывается, что в виде (4) принцип невязки, вообще говоря, не дает возможности выбирать значение параметра регуляризации для нелинейных задач. Предлагается новый способ выбора $\alpha(\delta)$, на основе которого строится регуляризующий алгоритм, применимый как для линейных, так и для нелинейных задач.

2. Рассмотрим пример. Пусть оператор A действует из пространства действительных чисел R с метрикой $\|z\|_R=|z|$ в то же пространство ($Z\equiv H\equiv R$, $U\equiv R$) и задается соотношением

$$Az=\begin{cases}\sqrt{|\bar{u}|^2-\alpha_0|z|^2}+\bar{u}, & 0\leqslant z\leqslant\bar{z}=\bar{u}\alpha_0^{-1/2},\\ 2\bar{u}, & z<0,\\ \sqrt{\alpha_0|z|^2-|\bar{u}|^2}+\bar{u}, & z>\bar{z},\end{cases} \tag{5}$$

(α_0 — числовой параметр, $\alpha_0>0$ $|\bar{u}|>\delta_0$).

Оператор (5) удовлетворяет условиям поставленной выше задачи. Пусть погрешности δ задания правой части соответствует элемент $\tilde{u}_\delta\equiv\bar{u}$. Строя функционал (3), минимизируя его и определяя значения невязки как функции α, $\alpha>0$, получим

$$\|Az_\delta^\alpha-\tilde{u}_\delta\|_U=\begin{cases}0, & 0<\alpha<\alpha_0,\\ |\bar{u}|, & \alpha\geqslant\alpha_0.\end{cases} \tag{6}$$

Так как по условию $|\bar{u}|>\delta_0$, то, каково бы ни было δ, $0<\delta\leqslant\delta_0$, выбор параметра регуляризации по условию (4) в данном случае оказывается невозможным.

3. В работе ([2]) показано, что в случае нелинейного непрерывного оператора функционал (3) имеет непустое множество экстремалей $\{z_\delta^\alpha\}$, реализующих его минимум в H при данных α и δ. Поставим в соответствие каждому $\alpha>0$ при данном фиксированном δ какую-либо экстремаль $z_\delta^\alpha\in\{z_\delta^\alpha\}$. Введем функции

$$\beta_\delta(\alpha)\equiv\|Az_\delta^\alpha-\tilde{u}_\delta\|_U^2,\quad \gamma_\delta(\alpha)\equiv\|z_\delta^\alpha\|_H^2,\quad \varphi_\delta(\alpha)\equiv M^\alpha[z_\delta^\alpha]. \tag{7}$$

Лемма. а) *Функции $\beta_\delta(\alpha)$ и $\varphi_\delta(\alpha)$ монотонно не убывают, а $\gamma_\delta(\alpha)$ монотонно не возрастает при $\alpha>0$;* б) *функция $\varphi_\delta(\alpha)$ непрерывна при $\alpha>0$;* в) *справедливы предельные соотношения*

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\beta_\delta(\alpha)=\lim_{\alpha\to+\infty}\varphi_\delta(\alpha)=\|A\cdot 0-\tilde{u}_\delta\|_U^2, \tag{8}$$

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\gamma_\delta(\alpha)=0, \tag{9}$$

$$\lim_{\alpha\to+0}\beta_\delta(\alpha)=\lim_{\alpha\to+0}\varphi_\delta(\alpha)=\mu_\delta\leqslant\delta^2, \tag{10}$$

где

$$\mu_\delta=\inf_{z\in Z}\|Az-\tilde{u}_\delta\|_U^2. \tag{11}$$

Пусть C — фиксированное число такое, что $1<C<\|A\cdot 0-\tilde{u}_\delta\|_U^2/\delta_0^2$. Введем множества $\mathfrak{A}_\delta(C)=\{\alpha\colon \alpha>0,\ \delta^2\leqslant\beta_\delta(\alpha)\leqslant C\delta^2\}$, $\mathfrak{B}_\delta(C)=\{\alpha\colon \alpha>0,\ \beta_\delta(\alpha)\leqslant\delta^2,\ \varphi_\delta(\alpha)\geqslant C\delta^2\}$.

Теорема 1. *Для всякого фиксированного δ, $0<\delta\leqslant\delta_0$, и не зависящего от δ фиксированного C множество $\mathfrak{A}_\delta(C)\cup\mathfrak{B}_\delta(C)$ непусто.*

Теорема 1 позволяет произвести определенный выбор параметра регуляризации $\alpha(\delta)$, который мы назовем альтернативным выбором. Он заключается в следующем: любой элемент непустого множества $\mathfrak{A}_\delta(C)\cup\mathfrak{B}_\delta(C)$ может быть взят в качестве $\alpha(\delta)$. Тем самым выделяется экстремаль $z_\delta^{\alpha(\delta)}$ функционала (3), соответствующая данному δ и выбранному $\alpha(\delta)$, принимаемая в качестве приближенного решения (1).

Теорема 2. *Пусть $\{\delta_n\}$ — произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю при $n\to\infty$.*

Тогда имеет место сходимость $z_{\delta_n}^{\alpha(\delta_n)}\xrightarrow{Z}\bar{z}$ *при $n\to\infty$.*

Результаты теорем 1 и 2 позволяют утверждать, что алгоритм приближенного решения задачи (1), основанный на минимизации функционала Тихонова с альтернативным выбором параметра регуляризации, является регуляризующим.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить акад. А. Н. Тихонова за внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
30 IV 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов, ДАН, 153, № 1, 49 (1963). [2] А. Н. Тихонов, ДАН, 161, № 5, 1023 (1965). [3] В. К. Иванов, Журнал вычислит. матем. и матем. физ., 6, № 6, 1089 (1966). [4] В. А. Морозов, ДАН, 167, № 3, 510 (1966).