

УДК 519.95

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

В. П. ДИДЕНКО, Н. Н. КОЗЛОВ

**О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ
ТЕХНИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ**

(Представлено академиком В. М. Глушковым 23 II 1973)

1. Многие задачи автоматического управления приводят к решению уравнений вида

$$Au = \int_0^T R(t, \tau) u(\tau) d\tau = f(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

где классом допустимых решений является класс обобщенных функций вида

$$u(t) = \sum_{i=0}^k c_i \delta^{(i)} + \varphi(t), \quad c_i = \text{const}$$

($\delta^{(i)}$ — производные i -го порядка от функций Дирака, $\varphi(t)$ — гладкая функция) (1).

Обозначим через W_2^0 пространство интегрируемых с квадратом функций, через W_2^{-l} — негативное пространство, сопряженное пространству Соболева W_2^{-l} , $l > 0$. Из теорем вложения для одной независимой переменной следует, что при $l > 1/2$ определены и входят в W_2^{-l} функции Дирака и ее производные до $(l-1)$ -го порядка включительно.

В работе (2) предложен метод регуляризации некорректных задач вида (1) в случае, когда $u(t)$ из пространства с положительной нормой. Если решение $u(t)$ содержит в качестве слагаемых δ -функции Дирака и их производные, то вопрос о регуляризации уравнения (1) рассматривался в работе (3), где доказывается существование обобщенного решения уравнения $A^*Au = A^*f$, а приближение в метрике $\|u\| = (Au, Au) = (A^*Au, u)$ (скобки означают скалярное произведение в W_2^0) рассматривается как регуляризация задачи.

В настоящей заметке на основании использования изометрических операторов (4) рассматривается регуляризация задачи $Au = f$, где f — заданный, а u — искомый элемент, A — вполне непрерывный оператор из W_2^{-l} в W_2^0 .

2. Рассмотрим интегральный оператор (1), который является вполне непрерывным из W_2^{-l} в W_2^0 , если

$$\int_0^T \|R(t, \tau)\|_{W_2^1}^2 dt < \infty.$$

Далее для определенности $l=1$. Предположим, что существует решение $\bar{u}$ уравнения (1) $\bar{u} \in W_2^{-1}$ и оно определено однозначно заданием совокупности точных исходных данных $\{A, f\}$.

Построим алгоритм для нахождения приближенного решения задачи (1), допускающий численную реализацию. По (4) вводим изометри-

ческие взаимно обратные операторы Δ и Δ^{-1} , полагая

$$\Delta u = -d^2u/dt^2 + u, \quad du/dt|_{t=0} = du/dt|_{t=\tau} = 0, \quad (2)$$

а Δ^{-1} — интегральный оператор с ядром G — функцией Грина выражения (2):

$$G(t, \tau) = \begin{cases} \frac{e^\tau + e^2 e^{-\tau}}{2e^2 - 2} (e^t + e^{-t}), & t \leq \tau, \\ \frac{e^\tau + e^{-\tau}}{2e^2 - 2} (e^t + e^2 e^{-t}), & t \geq \tau. \end{cases} \quad (3)$$

Оператор Δ переводит все W_2^1 на W_2^{-1} , оператор Δ^{-1} переводит W_2^{-1} на W_2^1 , причем

$$(u, v)_{W_2^{-1}} = (\Delta^{-1}u, v)_0 = (u, \Delta v)_0 = (\Delta^{-1}u, \Delta^{-1}v)_{W_2^1}, \quad (4)$$

$$(\varphi, \psi)_{W_2^1} = (\Delta\varphi, \psi)_0 = (\varphi, \Delta\psi)_0 = (\Delta\varphi, \Delta\psi)_{W_2^{-1}},$$

где $u, v \in W_2^{-1}$; $\varphi, \psi \in W_2^{-1}$; $(u, \varphi)_0$ — билинейная форма, совпадающая при $u \in W_2^0$ со скалярным произведением в W_2^0 , скобки $(\cdot, \cdot)_{W_2^{-1}}$, $(\cdot, \cdot)_{W_2^1}$ означают скалярное произведение в соответствующих пространствах.

3. Рассмотрим по Тихонову сглаживающий параметрический функционал

$$M^\alpha(u) = \|Au - f\|_{W_2^0}^2 + \alpha \int_0^\tau \int_0^\tau G(t, \tau) (u(t) - u_0(t)) (u(\tau) - u_0(\tau)) dt d\tau, \quad (5)$$

где $u \in W_2^{-1}$, u_0 — произвольный фиксированный элемент из W_2^{-1} , $\alpha > 0$ — параметр. Уравнением Эйлера для этого функционала является

$$A^*Au^\alpha + \alpha\Delta^{-1}u^\alpha = A^*f + \alpha\Delta^{-1}u_0. \quad (6)$$

Но рассмотрение далее по (2) не приводит к получению уравнения Фредгольма второго рода. Поэтому поступим следующим образом. Образуем для произвольного $z \in W_2^{-1}$ и выражения (6) билинейную форму

$$(A^*Au^\alpha, z)_0 + \alpha(\Delta^{-1}u^\alpha, z)_0 = (A^*f, z)_0 + \alpha(\Delta^{-1}u_0, z)_0. \quad (7)$$

Используя (4), для первого слагаемого из левой части (7) получаем

$$(A^*Au, z)_0 = (u, A^*Az)_0 = (\Delta^{-1}u, \Delta A^*Az)_0 = ((\Delta A^*A)^* \Delta^{-1}u, z)_0.$$

С учетом полученного и обозначая $\Delta^{-1}u^\alpha = v^\alpha$, перепишем (7) в форме

$$((\Delta A^*A)^* v^\alpha, z)_0 + \alpha(v^\alpha, z)_0 = (A^*f, z)_0 + \alpha(\Delta^{-1}u_0, z)_0,$$

откуда

$$(\Delta A^*A)^* v^\alpha + \alpha v^\alpha = A^*f + \alpha \Delta^{-1}u_0 \quad (8)$$

в смысле W_2^1 . Оператор $(\Delta A^*A)^*$ является вполне непрерывным из W_2^1 в W_2^1 . Действительно, вполне непрерывный оператор A действует из W_2^{-1} в W_2^0 , A^* — из W_2^0 в W_2^1 , A^*A — из W_2^{-1} в W_2^1 , ΔA^*A — из W_2^{-1} в W_2^{-1} . Оператор ΔA^*A вполне непрерывен, так как Δ — ограниченный оператор из W_2^{-1} в W_2^{-1} , откуда и следует вполне непрерывность оператора $(\Delta A^*A)^*$. Поэтому (8) является уравнением Фредгольма второго рода для каждого α .

Из (7) непосредственно следует, что однородное уравнение, соответствующее уравнению (8), имеет лишь тривиальное решение. Следовательно, существует единственная функция u^α , доставляющая минимум функционалу (5). Последовательность $\{v^\alpha\}$ определяет $\{u^\alpha\}$ по формуле $u^\alpha = \Delta v^\alpha$ и имеет место

$$\lim \|v^\alpha - \Delta^{-1}\bar{u}\|_{W_2^{-1}} = \lim \|u^\alpha - \bar{u}\|_{W_2^{-1}} = 0, \quad \alpha \rightarrow 0.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. Нахождение минимизирующей последовательности $\{u^\alpha\}$, $\alpha > 0$, $\alpha \rightarrow 0$ для параметрического функционала (5) сводится к нахождению решений $\{v^\alpha\}$, $\alpha > 0$, $\alpha \rightarrow 0$, параметрического семейства уравнений Фредгольма второго рода

$$\int_0^T \left[-\frac{d^2}{dt^2} R^*(t, \tau) + R^*(t, \tau) \right] v^\alpha(\tau) d\tau + \alpha v^\alpha = \\ = \int_0^T R(t, \tau) f(\tau) d\tau + \int_0^T G(t, \tau) u_0(\tau) d\tau, \quad (9)$$

где $R^*(t, \tau) = \int_0^T R(t, s) R(\tau, s) ds$, G — определено в (3). Это уравнение для

любого фиксированного $\alpha > 0$ и любого $f \in W_2^0$ имеет единственное решение $v^\alpha \in W_2^1$, причем, если взять последовательность гладких приближенных решений $\{v_n^\alpha\}$, $\alpha > 0$, $\alpha \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ (например, v_n^α дважды непрерывно дифференцируемы), уравнения (9), то $u_n^\alpha = \Delta v_n^\alpha$ образует минимизирующую последовательность для параметрического функционала (5).

То обстоятельство, что приближенные решения v_n^α дважды непрерывно дифференцируемы, упрощает задачу нахождения последовательности $u_n^\alpha = \Delta v_n^\alpha$, которая и является регуляризованным семейством приближенных решений задачи (1).

Аналогично находится регуляризация задачи (1) при приближенных исходных данных.

В общем случае, когда решение u уравнения (1) принадлежит пространству W_2^{-1} (A — вполне непрерывный оператор, не обязательно интегральный), схема рассуждений остается прежней, если в качестве Δ использовать изометрический оператор, переводящий все W_2^1 на W_2^{-1} , а в качестве Δ^{-1} — оператор, переводящий все W_2^{-1} на W_2^1 ; тогда имеет место

Теорема 2. Пусть $Au = f$, где u — искомая, f — заданная функции, определенные в некоторой ограниченной n -мерной области, A — вполне непрерывный оператор из W_2^{-1} в W_2^1 ; тогда нахождение минимизирующей последовательности для параметрического функционала

$$M^\alpha(u) = \|Au - f\|_{W_2^0}^2 + \alpha \|u - u_0\|_{W_2^{-1}}^2, \quad (10)$$

где u_0 — произвольный фиксированный элемент из W_2^{-1} , эквивалентно нахождению решений v^α , $\alpha > 0$, $\alpha \rightarrow 0$, параметрического семейства уравнений

$$(\Delta A^* A)^* v^\alpha + \alpha v^\alpha = A^* f + \alpha \Delta^{-1} u_0, \quad (11)$$

где $(\Delta A^* A)^*$ — вполне непрерывный оператор из W_2^1 в W_2^1 .

Уравнение (11) для любого фиксированного $\alpha > 0$ и любого $f \in W_2^0$ имеет единственное решение $v^\alpha \in W_2^1$, причем, если взять последовательность гладких приближенных решений $\{v_n^\alpha\}$, $\alpha > 0$, $\alpha \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ (например, $v_n^\alpha \in W_2^{21}$), уравнения (11), то $u_n^\alpha = \Delta v_n^\alpha$ образует минимизирующую последовательность для параметрического функционала (10).

Поступило
20 II 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Теория автоматического регулирования, под ред. В. В. Солодовникова, М., 1969.
² А. Н. Тихонов, ДАН, 151, № 3, 501 (1963). ³ Ю. П. Леонов, ДАН, 206, № 1, 37 (1972). ⁴ Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, 1965.