

УДК 517.537

МАТЕМАТИКА

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ, С. С. ЛИНЧУК,
Н. И. НАГНИБИДА

О БАЗИСАХ В АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ, БЛИЗКИХ К СТЕПЕННЫМ

В этой заметке находятся условия квазистепенной базисности в пространстве A_r , $0 < r < \infty$, системы функций $\{z^n f_n(\beta_n z)\}$, где $f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} z^k \in A_{Rn}$,

а $\{\beta_n\}$ — некоторая последовательность комплексных чисел, причем $r_0 = \inf(R_n / |\beta_n|) > 0$. Очевидно, рассматриваемая система может быть квазистепенным базисом лишь в тех A_r , для которых $r \leq r_0$. Для дальнейшего нам понадобится следующая

Лемма (1). Пусть оператор L отображает некоторое пространство A_R в себя и его матрица $[l_{k,n}]_{k,n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям:

- 1) $l_{k,k} = 1$, $k \geq 0$, а $l_{k,n} = 0$ при $k < n$;
- 2) для всякого ρ , $\rho < R$,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |l_{k,n}| \rho^{k-n} < 1. \quad (1)$$

Тогда L является изоморфизмом A_R на себя.

Найдем условия, при которых оператор T , определяемый соотношениями

$$Tz^n = z^n f_n(\beta_n z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_{k-n}^{(n)} \beta_n^{k-n} z^k, \quad n=0, 1, \dots,$$

может быть расширен до изоморфизма некоторого пространства $A_{\tilde{r}}$ на A_r . Матрица $[t_{k,n}]_{k,n=0}^{\infty}$ оператора T в степенном базисе $\{z^n\}$ имеет вид

$$t_{k,n} = \begin{cases} 0, & k < n, \\ a_{k-n}^{(n)} \beta_n^{k-n}, & k \geq n. \end{cases}$$

Будем предполагать, что выполняются следующие условия (см. (2)):

$$a_0^{(n)} \neq 0, \quad n=0, 1, \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_0^{(n)}|^{1/n} = l \neq 0. \quad (2)$$

Представим оператор T в виде $T = T_2 T_1$, где T_1 и T_2 имеют соответственно матрицы

$$t_{k,n}^{(1)} = \begin{cases} 0, & k < n, \\ [a_{k-n}^{(n)} / a_0^{(k)}] \beta_n^{k-n}, & k \geq n; \end{cases} \quad t_{k,n}^{(2)} = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ a_0^{(n)}, & k = n. \end{cases}$$

В силу (2) T_2 является изоморфизмом $A_{\tilde{r}}$ на A_r , $\tilde{r} = l_r$. Поэтому, чтобы T был изоморфизмом $A_{\tilde{r}}$ на A_r , необходимо и достаточно, чтобы T_1 был изоморфизмом пространства $A_{\tilde{r}}$ на себя. В этом случае условие (1) для оператора T_1 принимает вид

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k^{(n)}| / |a_0^{(k+n)}|) (|\beta_n| \rho)^k < 1$$

для всякого ρ , $\rho < \tilde{r}$.

Рассмотрим теперь функции

$$\varphi_n(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k^{(n)}|/|a_0^{(k+n)}|) l^k \sigma^k, \quad n=0, 1, \dots$$

Легко проверить, что $\varphi_n(\sigma) \in A_{R_n}$. Кроме того, для каждой функции $\varphi_n(\sigma)$ на $(0, R_n)$ имеем, очевидно, $\varphi_n(0)=0$, $\varphi_n(\sigma)$ неубывающая и выпукла вниз. Будем рассматривать также $\varphi_n(R_n) = \lim_{\sigma \rightarrow R_n-0} \varphi_n(\sigma)$ и уравнения $\varphi_n(\sigma)=1$ на

интервале $(0, R_n)$, $n \geq 0$. В случае $\varphi_n(R_n) > 1$ уравнение $\varphi_n(\sigma)=1$ имеет на $(0, R_n)$ единственное решение, обозначим его через σ_n . Если же $\varphi_n(R_n) \leq 1$, то уравнение $\varphi_n(\sigma)=1$ на $(0, R_n)$ решения не имеет, в этом случае полагаем $\sigma_n = R_n$.

Будем предполагать еще, что $r_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma_n/|\beta_n|) > 0$, и докажем, что при

сделанных предположениях оператор T_1 является изоморфизмом каждого пространства A_r на себя при $r \leq l \cdot \min\{r_0, r_1\}$.

Если $\min\{r_0, r_1\} = r_0 < r_1$, то в этом случае для всякого $\rho < l r_0$ и для $n \geq n_0$ (но такое, что $\sigma_n/|\beta_n| \geq r_0$ при $n \geq n_0$) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} [|a_k^{(n)}|/|a_0^{(k+n)}|] (|\beta_n| \rho)^k = \varphi_n \left(\frac{\rho}{l r_0} |\beta_n| r_0 \right) \leq \frac{\rho}{l r_0} \varphi_n(\sigma_n) \leq \frac{\rho}{l r_0} < 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} [|a_k^{(n)}|/|a_0^{(k+n)}|] (|\beta_n| \rho)^k < 1$$

и остается лишь воспользоваться леммой.

Пусть теперь $\min\{r_0, r_1\} = r_1 \leq r_0$. В этом случае для каждого $0 < q \leq 1$ рассмотрим уравнения $\varphi_n(\sigma) = q$ на $(0, R_n)$. Если уравнение $\varphi_n(\sigma) = q$ имеет на $(0, R_n)$ решение, то обозначим его через $\sigma_n(q)$. В противном случае мы снова полагаем $\sigma_n(q) = R_n$.

Введем в рассмотрение функцию $r_1(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma_n(q)/|\beta_n|)$. В этих обо-

значениях $r_1 = r_1(1)$. Функция $r_1(q)$, очевидно, является неубывающей на $(0, 1]$ и поэтому существует $\lim_{q \rightarrow 1-0} r_1(q)$. Покажем, что $\lim_{q \rightarrow 1-0} r_1(q) = r_1$. Дока-

зательство проведем для $r_1 < +\infty$ (в случае $r_1 = +\infty$ оно аналогично). С этой целью достаточно проверить, что для произвольного ε , $0 < \varepsilon < r_1/2$, существуют такие $q_\varepsilon < 1$ и n_0 , что $\sigma_n(q_\varepsilon)/|\beta_n| \geq r_1 - 2\varepsilon$, $n \geq n_0$. Положим $q_\varepsilon = (r_1 - 2\varepsilon)/(r_1 - \varepsilon)$ и покажем, что в качестве n_0 можно взять такое (его существование очевидно), чтобы $\sigma_n(1)/|\beta_n| \geq r_1 - \varepsilon$ при всех $n \geq n_0$. Действительно, если это не так, т. е. существует такое $N \geq n_0$, что $\sigma_N(q_\varepsilon)/|\beta_N| < r_1 - 2\varepsilon$, то, очевидно, *

$$q_\varepsilon = \varphi_N \left(\frac{\sigma_N(q_\varepsilon)}{\sigma_N(1)} \sigma_N(1) \right) \leq \frac{\sigma_N(q_\varepsilon)}{\sigma_N(1)} \varphi_N(\sigma_N(1)) \leq \frac{\sigma_N(q_\varepsilon)}{\sigma_N(1)} < \frac{r_1 - 2\varepsilon}{r_1 - \varepsilon},$$

а полученные неравенства приводят к противоречию. Следовательно,

$$r_1(q_\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\sigma_n(q_\varepsilon)/|\beta_n|] \geq r_1 - 2\varepsilon$$

и, тем самым, $\lim_{q \rightarrow 1-0} r_1(q) = r_1$, что и требовалось показать.

* Равенство $\sigma_N(q_\varepsilon) = R_N$ невозможно, так как в противном случае было бы $r_1 - 2\varepsilon > R_N/|\beta_N| \geq r_0 \geq r_1$.

Берем теперь произвольное $\rho < l r_1$. Для него находим такое $q_0 < 1$, чтобы $r_1(q_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma_n(q_0)/|\beta_n|) > \rho/l$.

Пусть, далее, n_1 таково, что $\sigma_n(q_0)/|\beta_n| \geq \rho/l$ для всех $n \geq n_1$ или же $|\beta_n| \rho/l \leq \sigma_n(q_0)$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k^{(n)}|}{|a_0^{(k+n)}|} (|\beta_n| \rho)^k = \varphi_n \left(\frac{|\beta_n| \rho}{l} \right) \leq \varphi_n(\sigma_n(q_0)) \leq q_0 < 1, \quad n \geq n_1,$$

и поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k^{(n)}|}{|a_0^{(k+n)}|} (|\beta_n| \rho)^k \leq q_0 < 1.$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. Пусть

$$f_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(n)} z^k \in A_{R_n}, \quad n=0, 1, \dots,$$

причем $a_0^{(n)} \neq 0$, $n=0, 1, \dots$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_0^{(n)}|^{1/n} = l$, а $\{\beta_n\}$ — некоторая последовательность комплексных чисел. Пусть, далее, через σ_n обозначено решение на $(0, R_n)$ уравнения

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k^{(n)}|}{|a_0^{(k+n)}|} \cdot l^k \sigma^k = 1,$$

если оно существует, и $\sigma_n = R_n$ в противном случае. Если, кроме того,

$$\min \{ \inf (R_n/|\beta_n|), \lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma_n/|\beta_n|) \} > 0,$$

то система функций $\{z^n f_n(\beta_n z)\}$ образует квазистепенной базис в каждом A_r , где

$$r \leq \min \{ \inf (R_n/|\beta_n|), \lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma_n/|\beta_n|) \}.$$

Пример. Как известно ⁽³⁾, система $\{1, z^n/(1-z^n)\}$ полна в A_1 . Для нее $\sigma_0 = +\infty$, а $\sigma_n = 2^{-1/n}$, $n \geq 1$. Следовательно, $\min \{1, \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-1/n}\} = 1$ и данная

система образует также квазистепенной базис в каждом A_r с $r \leq 1$.

Если в процессе доказательства теоремы 1 диагональный изоморфизм T_2 выделить в соответствующем представлении оператора T не слева, а справа, то, проведя аналогичные предыдущим рассуждения, мы убеждаемся в том, что верна

Теорема 2. Пусть

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} z^k \in A_{R_n}, \quad n=0, 1, \dots,$$

причем $a_0^{(n)} \neq 0$, $n=0, 1, \dots$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_0^{(n)}|^{1/n} = l$, а $\{\beta_n\}$ — некоторая последовательность комплексных чисел. Пусть σ_n — решение соответствующего

уравнения $\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k^{(n)}|/|a_0^{(n)}|) \sigma^k = 1$ на $(0, R_n)$, если оно существует, и $\sigma_n = R_n$ в противном случае. Если, кроме того,

$$\min \{ \inf (R_n/|\beta_n|), \lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma_n/|\beta_n|) \} > 0,$$

то система функций $\{z^n f_n(\beta_n z)\}$ образует квазистепенной базис в каждом A_r , где

$$r \leq \min \left\{ \inf \frac{R_n}{|\beta_n|}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n}{|\beta_n|} \right\}.$$

З а м е ч а н и е 1. Из теоремы 1 и 2 видно, что если для системы функций $\{f_n(z)\}$ выполняются условия $a_0^{(n)} \neq 0$, $n=0, 1, \dots$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_0^{(n)}|^{1/n} = l$,

то для произвольного R , $0 < R < \infty$, можно указать такую последовательность комплексных чисел $\{\beta_n\}$, что соответствующая система $\{z^n f_n(\beta_n z)\}$ будет квазистепенным базисом в каждом A_r с $r \leq R$.

В том случае, когда $a_0^{(n)} = a \neq 0$, $n=0, 1, \dots$, теоремы 1 и 2 дают одинаковый результат, так как соответствующие функции $\varphi_n(\sigma)$, $n=0, 1, \dots$, для них совпадают. В общем же случае эти теоремы дают различные результаты.

Рассмотрим систему функций

$$\{f_{2n}(z) = z^{2n}(a+bz); f_{2n+1}^{(z)} = z^{2n+1}(a_1+b_1z)\},$$

где $aa_1 \neq 0$, и положим $\delta = (|a_1| - |a|)(|b_1| - |b|)$. Тогда можно проверить, что если $\delta = 0$, то теоремы 1 и 2 равносильны; если $\delta < 0$, то теорема 1 дает лучший результат, чем теорема 2; если же $\delta > 0$, то, наоборот, теорема 2 дает лучший результат, чем теорема 1.

З а м е ч а н и е 2. Если известны оценки σ' снизу решений уравнений $\varphi_n(\sigma) = 1$, т. е. $\sigma_n' \leq \sigma_n$, то теоремы 1 и 2 останутся верными, если в их формулировках σ_n заменить на σ_n' .

Из теоремы 1 и замечания 2 вытекает

С л е д с т в и е 1. Пусть $F(z)$ — целая функция, $F^{(\mu_s)}(0) = 0$, $s=0, 1, \dots$, $F^{(\nu_k)}(0) \neq 0$, $k=0, 1, \dots$, и $\lim_{k \rightarrow \infty} |F^{(\nu_k)}(0)|^{1/\nu_k} = 1$,

(здесь $\{\mu_s\} \cup \{\nu_k\} = \{n\}$).

Тогда система $\{z^{\mu_s}\} \cup \{z^{\nu_k F^{(\nu_k)}}(\beta_k z)\}$ образует квазистепенной базис в каждом A_r , где $r \leq (\ln 2) / \lim_{k \rightarrow \infty} |\beta_k|$.

Отметим, что при $\nu_k \neq pk$ (p фиксированное натуральное) такая система исследовалась ранее на базисность в ⁽⁴⁾.

С помощью теоремы 2 доказывается

С л е д с т в и е 2. Пусть $f_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(i)} z^k$, $i=1, \dots, m$, — фиксированные

функции из A_R , причем $f_i(0) \neq 0$, $1 \leq i \leq m$.

Тогда система $\{z^n \psi_n(z)\}$, где каждая функция $\psi_n(z)$ совпадает с одной из $f_i(z)$, $i=1, \dots, m$, образует квазистепенной базис в каждом из A_r с $r \leq \min\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$; здесь σ_i — решение уравнения

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k^{(i)}| / |a_0^{(i)}|) \cdot \sigma^k = 1$$

на $(0, R)$, если оно существует, и $\sigma_i = R$ в противном случае.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
11 VI 1973

Черновицкий государственный университет

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ К. М. Фишман, Н. И. Нагнибида, Сиб. матем. журн., 6, 4, 944 (1965).
² В. И. Горгула, Н. И. Нагнибида, Укр. матем. журн., 24, 6, 820 (1972). ³ И. И. Ибрагимов, Методы интерполяции функций и некоторые их применения, «Наука», 1971, стр. 1. ⁴ И. И. Ибрагимов, Н. И. Нагнибида, ДАН, 206, № 6, 1290 (1972).