Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 3

УДК 513.83 *МАТЕМАТИКА*

В. А. КАЛИНИН

ОБ АППРОКСИМАЦИОННЫХ РЕТРАКТАХ ДЛЯ КЛАССА БИКОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 21 V 1973)

На класс бикомпактов обобщаются понятия абсолютного аппроксимационного ретракта и абсолютного аппроксимационного окрестностного ретракта, введенные в работах ([1], [2]) для компактов. Распространяется ряд теорем, доказанных для компактов, на бикомпактный случай. Рассматриваются связи введенных классов пространств с классами пространств, определенными Мардешичем в работе ([3]).

1. Пусть X — некоторое пространство и A — его подмножество. Под окрестностями множества A будем понимать его окрестности в пространстве X. В дальнейшем, если специально не оговорено другого, рассматриваемые пространства считаются бикомпактами, а отображения — непрерывными.

Определение 1. Пусть ω — открытое в X покрытие множества A. Отображение r_ω: $X\to A$ называется ω-ретракцией пространства X в A, если для любого $a\in A$ существует такое $V\in\omega$, что $a\in V$ и $r_\omega(a)\in V$, т. е. система пар $(a, r_\omega(a))$ вписана в покрытие ω.

Определение 2. A называется Ω-ретрактом пространства X, если для любого открытого в X покрытия ω множества A существует ω-ретракция пространства X в A.

Определение 3. Бикомпакт X называется абсолютным Ω-ретрактом, $X\in A\Omega R$, если при любом вложении i: $X\to Y$ в произвольный бикомпакт Y образ iX является Ω-ретрактом пространства Y.

Пространства из определенного выше класса абсолютных Ω-ретрактов обладают некоторыми свойствами, аналогичными свойствам абсолютных ретрактов для класса бикомпактов.

Теорема 1. *$X\in A\Omega R$ тогда и только тогда, когда X гомеоморфно некоторому замкнутому Ω-ретракту некоторого тихоновского куба I^τ.*

Следующая теорема характеризует понятие абсолютного Ω-ретракта с помощью продолжения отображений.

Теорема 2. *Бикомпакт $Y\in A\Omega R$ тогда и только тогда, когда для любого открытого покрытия ω пространства Y и для любого f: $A\to Y$, где A — замкнутое подмножество произвольного нормального пространства X, существует такое отображение f_ω: $X\to Y$, что для любого $a\in A$ существует такое $V\in\omega$, что $f(a)\in V$ и $f_\omega(a)\in V$.*

Для понятия Ω-ретракта верна транзитивность.

Теорема 3. *Пусть $X''\supset X'\supset X$, где X является Ω-ретрактом пространства X', а X' является Ω-ретрактом пространства X''.*

Тогда X есть Ω-ретракт пространства X''.

Следствие 1. *Если естественным образом определить понятие абсолютного Ω-экстензора для бикомпактов, то это понятие будет эквивалентно понятию абсолютного Ω-ретракта.*

Следствие 2. *$X\in A\Omega R$ тогда и только тогда, когда X есть Ω-ретракт некоторого AR-пространства.*

Определение 4. A называется окрестностным Ω-ретрактом в смысле Ногуши пространства X (окрестностным Ω-ретракто м в с м ы с л е Клап п а), если для любого открытого в X покрытия ω множества A существует ω-ретракция некоторой окрестности OA множества A в A (существует окрестность $O_\omega A$ и ω-ретракция этой окрестности в A).

Определение 5. Бикомпакт X называется абсолютным окрестностным Ω-ретрактом в смысле Ногуши, $X\in\mathrm{AN\Omega R}_N$ (абсолютным окрестностным Ω-ретрактом в смысле Клаппа, $X\in\mathrm{AN\Omega R_C}$), если при любом вложении i: $X\to Y$ в произвольный бикомпакт Y образ iX является окрестностным Ω-ретрактом в смысле Ногуши пространства Y (окрестностным Ω-ретрактом в смысле Клаппа).

Ясно, что AR-пространства являются абсолютными Ω-ретрактами, ANR-пространства являются абсолютными окрестностными Ω-ретрактами в обоих смыслах и верны

Следствия. *Если* $X\in\mathrm{A\Omega R}$, *то* $X\in\mathrm{AN\Omega R}_N$ *и* $X\in\mathrm{AN\Omega R_C}$; *если* $X\in\mathrm{AN\Omega R}_N$, *то* $X\in\mathrm{AN\Omega R_C}$.

Замечание. Все приведенные выше теоремы и следствия, если их сформулировать соответствующим образом для обоих окрестностных случаев, также верны.

Теперь сформулируем теоремы произведения для рассматриваемых пространств.

Теорема 4. *Пусть* $X=\prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} X_\alpha$, *где* $\mathfrak{A}$ — *произвольное множество индексов. Тогда*:

а) $X\in\mathrm{A\Omega R}$ ($\mathrm{AN\Omega R_C}$) *тогда и только тогда, когда* $X_\alpha\in\mathrm{A\Omega R}$ ($\mathrm{AN\Omega R_C}$) *для любого* $\alpha\in\mathfrak{A}$.

б) $X\in\mathrm{AN\Omega R}_N$ *тогда и только тогда, когда* $X_\alpha\in\mathrm{AN\Omega R}_N$ *для любого* $\alpha\in\mathfrak{A}$ *и* $X_\alpha\in\mathrm{A\Omega R}$ *для почти всех* $\alpha\in\mathfrak{A}$.

Следующая теорема утверждает возможность продолжения отображения с Ω-ретракта некоторого пространства на все это пространство.

Теорема 5. *Всякое отображение* f: $A\to Y$ *любого* Ω*-ретракта* A *пространства* X *в* $Y\in\mathrm{ANR}$ *имеет непрерывное продолжение* $\mathrm{ext}\, f$: $X\to Y$.

В конце первой части работы приведем две теоремы, которые позволяют строить примеры пространств, принадлежащих рассматриваемым классам. Пусть M — паракомпакт, 2^M — множество всех непустых бикомпактных подмножеств пространства M и X, $X_\omega\in 2^M$.

Теорема 6. *Если для любого открытого покрытия* ω *пространства* M *существуют* $X_\omega\in\mathrm{A\Omega R}$ ($\mathrm{AN\Omega R_C}$) *и такие непрерывные отображения* p_ω: $X_\omega\to X$ *и* q_ω: $X\to X_\omega$, *что системы пар* $(x, p_\omega(x))$, *где* $x\in X_\omega$ *и* $(x, q_\omega(x))$, *где* $x\in X$, *вписаны в покрытие* ω, *то* $X\in\mathrm{A\Omega R}$ ($\mathrm{AN\Omega R_C}$).

Теорема 7. *Пусть* $X\subset I^\tau$; $X\in\mathrm{AN\Omega R_C}$ *тогда и только тогда, когда для любого открытого покрытия* ω *куба* I^τ *существуют такие конечный полиэдр* $P_\omega\subset I^\tau$ *и отображения* p_ω: $P_\omega\to X$ *и* q_ω: $X\to P_\omega$, *что системы пар* $(y, p_\omega(y))$ *и* $(x, q_\omega(x))$, *где* $y\in P_\omega$ *и* $x\in X$, *вписаны в покрытие* ω.

2. Вторая часть работы посвящена рассмотрению взаимоотношений понятий абсолютного Ω-ретракта, абсолютных окрестностных Ω-ретрактов в смысле Ногуши и Клаппа, с одной стороны, и понятий абсолютного шейпового ретракта и абсолютного окрестного шейпового ретракта, введенных Мардешичем ([3]), с другой стороны.

Теорема 8. *Пусть* $X\in\mathrm{ANR}$ *и подмножество* A *является его* Ω*-ретрактом. Если* X *гомотопически тривиально над* Y, *то любое отображение* f: $Y\to A$ *гомотопно постоянному отображению в любой окрестности множества* A.

Везде дальше будем предполагать, что бикомпакт X лежит в некотором тихоновском кубе I^τ, где мощность τ равна wX. Таким образом, окрестности множества X — это его окрестности в I^τ.

Следствие 3. *Если* $X\in\mathrm{A\Omega R}$, *то* X *стягиваемо в любой своей окрестности* (*в* I^τ).

Следствие 4. *Если* $X \in A\Omega R$, *то для его окрестности* U (*в* I^τ) *существует такая его окрестность* U_0, *которая стягиваема в* U.

Мардешичем ([3], теоремы 4, 5)) было доказано следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $\underline{X}=\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ — *некоторая* ANR-*система, ассоциированная с* X. X *является абсолютным шейповым ретрактом*, $X \in ASR$, *тогда и только тогда, когда для любого* $\alpha \in A$ *существует такое* $\alpha' \geqslant \alpha$, $\alpha' \in A$, *что* $p_{\alpha\alpha'}$ *гомотопно постоянному отображению*, $p_{\alpha\alpha'} \simeq 0$.

В [4] и [3] было показано, что для каждого бикомпакта X существует ANR-система $\underline{X}=\{X_\alpha, i_{\alpha\alpha'}, A\}$, т. е. обратный спектр из ANR-пространств, ассоциированная с X, т. е. $X=\underleftarrow{\lim}\,\underline{X}$, где $X_{\alpha'} \subset X_\alpha$ при любых $\alpha' \geqslant \alpha$ из A, проекции $i_{\alpha\alpha'}$ — вложения, проекции i_α: $X \to X_\alpha$ — также вложения и множество индексов A направлено и замкнуто-конечно, т. е. любое $\alpha \in A$ имеет конечное число предшественников в A. Этот обратный спектр называется вложенной ANR-системой для бикомпакта X. Из построения вложенной ANR-системы следует, что каждое ANR-пространство X_α является окрестностью бикомпакта X (в I^τ) и для любой окрестности U множества X (в I^τ) существует такое $\alpha \in A$, что $X_\alpha \subset U$. Отсюда, применяя следствие 4 и теорему Мардешича, имеем следующее утверждение.

Теорема 9. *Если* $X \in A\Omega R$, *то* $X \in ASR$.

Если $X \in AN\Omega R_C$, то верна обратная теорема.

Теорема 10. *Если* $X \in ASR \& AN\Omega R_C$, *то* $X \in A\Omega R$.

Из теорем 9 и 10 получаем

Следствие 5. $X \in A\Omega R$ *тогда и только тогда, когда* $X \in ASR$ *и* $X \in AN\Omega R_C$.

Определение 6. Назовем $X \subset I^\tau$ слабым ретрактом, если существует такая окрестность U_0, что для любой окрестности U существуют такие отображение f_U: $U_0 \to U$ и его окрестность W, что $f_U(x)=x$ для любого $x \in W$.

Определение 7. Бикомпакт $X \subset I^\tau$ называется подвижным, если для любой его окрестности U существует такая его окрестность V, что для любой его окрестности U' существует гомотопия φ: $V \times I \to U$, где $\varphi(x, 0)=x$ и $\varphi(x, 1) \in U'$ для любого $x \in V$.

Определение 8. Бикомпакт $X \subset I^\tau$ называется внутренне подвижным, если для любой его окрестности U существует такая его окрестность V и гомотопия φ: $V \times I \to U$, что $\varphi(x, 0)=x$ и $\varphi(x, 1) \in X$ для любого $x \in V$.

Ясно, что из внутренней подвижности следует подвижность. Заметим, что определение 7 дословно повторяет определение подвижности Борсука для компактов [5], а определение 8 — определение Богатого [6], который доказал для компактов теоремы, аналогичные теоремам 9 и 10 и следствиям 7 и 8.

Предложение 1. *Определения* 6, 7 *и* 8 *не зависят от вложения пространства* X *в* I^τ.

Предложение 2. *Бикомпакт* X *подвижен тогда и только тогда, когда он подвижен в смысле Мардешича* [7].

Предложение 3. *Если* $X \in AN\Omega R_C$, *то* X *внутренне подвижен.*

Предложение 4. *Если* $X \in AN\Omega R_N$, *то он есть слабый ретракт.*

Следствие 6. $X \in AN\Omega R_N$ *тогда и только тогда, когда* $X \in AN\Omega R_C$ *и является слабым ретрактом.*

Используя характеристику абсолютных окрестностных шейповых ретрактов ANSR, данную Мардешичем в [3], теорема 7, можно получить следующее утверждение.

Теорема 11. *Если бикомпакт* X *внутренне подвижен и является слабым ретрактом, то* $X \in ANSR$.

В обратную сторону верна

Теорема 12. *Если* $X \in ANSR$, *то* X *подвижен и является слабым ретрактом.*

Предложения 2, 3, 4, следствие 6 позволяют вывести также некоторые следствия из теорем 11 и 12.

С л е д с т в и е 7. *Если* $X \in \mathrm{AN}\Omega\mathrm{R}_N$, *то* $X \in \mathrm{ANSR}$.

С л е д с т в и е 8. $X \in \mathrm{AN}\Omega\mathrm{R}_N$ *тогда и только тогда, когда* $X \in \mathrm{ANSR}\&\&\mathrm{AN}\Omega\mathrm{R}_C$.

В заключение мне хочется выразить свою искреннюю благодарность проф. Ю. М. Смирнову за руководство этой работой.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
21 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. N o g u c h i, Kodai Math. Seminar Reports, 1, 20 (1953). [2] M. H. C l a p p, Fund. Math. 70, 117 (1971). [3] S. M a r d e š i ć, Glashik Matematicki. 6, 1 (1971). [4] S. M a r d e š i ć, J. S e g a l, Fund. Math., 72, 41 (1971). [5] K. B o r s u k, Fund. Math., 66, 137 (1969). [6] С. Б о г а т ы й, Матем. сборн., 93, в. 1 (1974). [7] S. M a r d e š i ć, T. S e g a l, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys., 18, 649 (1970).