

Г. Л. ЛИТВИНОВ

ХАРАКТЕРЫ И ПРОСТЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 6 VI 1973)

В работе рассматриваются характеры непрерывных представлений топологических алгебр и групп в локально-выпуклых пространствах и указывается класс представлений, каждое из которых определяется своим характером с точностью до некоторой естественной эквивалентности. Все линейные пространства рассматриваются над полем комплексных чисел, все локально-выпуклые пространства предполагаются separable.

1. Пусть E — локально-выпуклое пространство, E' — сопряженное к E пространство. Значение линейного функционала $x' \in E'$ на векторе $x \in E$ будем обозначать через $\langle x', x \rangle$. Обозначим через $\mathcal{S}(E)$ алгебру всех линейных слабо непрерывных операторов в E , наделенную слабой операторной топологией (которая задается полунормами $A \mapsto |\langle x', Ax \rangle|$, где x и x' пробегает E и E' соответственно). Пусть $\mathfrak{A}$ — ассоциативная топологическая алгебра с раздельно непрерывным умножением и с единицей (в настоящей работе рассматриваются только такие топологические алгебры). Непрерывным представлением T алгебры $\mathfrak{A}$ в пространстве E будем называть такое непрерывное отображение $T: \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{S}(E)$, которое является гомоморфизмом алгебр с единицей. Если образ гомоморфизма T плотен в $\mathcal{S}(E)$, то представление T называется вполне неприводимым. Ядро $\text{Ker } T = \{a \in \mathfrak{A}: T(a) = 0\}$ непрерывного представления является замкнутым двусторонним идеалом в $\mathfrak{A}$. Будем называть представления изоморфными, если их ядра совпадают (см. ⁽⁵⁾ и ⁽⁶⁾). Вполне неприводимые представления изоморфны тогда и только тогда, когда они «функционально эквивалентны» в смысле работы Фелла ⁽⁷⁾. Поэтому изоморфные вполне неприводимые представления будем называть эквивалентными по Феллу. Для конечномерных неприводимых представлений эквивалентность по Феллу совпадает с обычной эквивалентностью (определяемой оператором подобия).

Введем важное

О п р е д е л е н и е. Непрерывное представление T топологической алгебры $\mathfrak{A}$ назовем простым, если $\text{Ker } T$ — максимальный замкнутый двусторонний идеал в $\mathfrak{A}$, т. е. если всякий замкнутый двусторонний идеал, содержащий в себе $\text{Ker } T$, совпадает с $\text{Ker } T$ или с $\mathfrak{A}$.

Неприводимые представления обычно бывают простыми. Всякое конечномерное неприводимое представление является простым.

2. Пусть G — локально-компактная группа, $C(G)$ — пространство непрерывных функций на G , наделенное топологией равномерной сходимости на компактах. Через $\mathcal{M}(G)$ обозначим топологическую групповую алгебру, состоящую из всех комплексных мер Радона с компактным носителем на G , т. е. линейных непрерывных функционалов на $C(G)$, и наделенную слабой топологией $\sigma(\mathcal{M}(G), C(G))$. Произведением элементов в $\mathcal{M}(G)$ является свертка мер, а единицей служит мера Дирака, сосредоточенная в единице группы G . Следуя работе ⁽⁷⁾, представление $g \mapsto T_g$ группы G в пространстве E (т. е. гомоморфизм группы G в группу обратимых операторов из $\mathcal{S}(E)$) будем называть непрерывным, если:

1) все матричные элементы, т. е. функции вида $g \mapsto \langle x', T_g x \rangle$, непрерывны на G ,

2) для любого элемента $a \in \mathcal{M}(G)$ существует такой оператор $T(a) \in \mathcal{P}(E)$, что $\langle x', T(a)x \rangle = \int \langle x', T_g x \rangle da(g)$ для всех $x \in E$, $x' \in E'$.

Можно проверить, что соответствие $a \mapsto T(a)$ является непрерывным представлением алгебры $\mathcal{M}(G)$ и что таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между непрерывными представлениями группы G и алгебры $\mathcal{M}(G)$ (см. ⁽⁹⁾). Для непрерывности представления $g \mapsto T_g$ группы G достаточно, чтобы пространство E было полным или квазиполным и чтобы соответствие $(g, x) \mapsto T_g x$ было непрерывным отображением $G \times E \rightarrow E$ (см. ⁽¹²⁾). Непрерывные представления группы G будем называть неприводимыми, простыми, изоморфными, эквивалентными, если таковы соответствующие представления алгебры $\mathcal{M}(G)$. Если группа имеет массивную компактную подгруппу, то для ее вполне неприводимых представлений эквивалентность по Феллу совпадает с эквивалентностью по Наймарку (см. ⁽⁷⁾). Рассуждая так же, как в п. 8 § 2 работы ⁽²⁾, можно доказать следующую лемму.

Л е м м а. Если локально-компактная группа G имеет массивную компактную подгруппу (например, если G — линейная полупростая группа Ли), то любое вполне неприводимое непрерывное представление этой группы является простым.

3. Пусть $\mathfrak{A}$ — топологическая алгебра. Линейное пространство $\mathfrak{B}$ является двусторонним $\mathfrak{A}$ -модулем, если его элементы можно умножать слева и справа на элементы из $\mathfrak{A}$, причем умножение ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$; кроме того, будем всегда предполагать, что $1 \cdot b = b$ (или $b \cdot 1 = b$) для всех $b \in \mathfrak{B}$, где 1 — единица в $\mathfrak{A}$. Двусторонним $\mathfrak{A}$ -модулем является любой двусторонний идеал в $\mathfrak{A}$. Если G — группа Ли с инвариантной мерой dg , то пространство $C_0^\infty(G)$ гладких финитных функций на G можно отождествить с плотным двусторонним идеалом в $\mathcal{M}(G)$, сопоставляя функции $\varphi(g)$ меру $\varphi(g)dg$. Таким образом, $C_0^\infty(G)$ является двусторонним $\mathcal{M}(G)$ -модулем со сверткой в качестве умножения. Другими примерами двусторонних $\mathcal{M}(G)$ -модулей являются пространство Шварца на полупростой группе Ли G (см. ⁽⁸⁾) и пространство суммируемых функций на локально-компактной группе G .

Х а р а к т е р о м непрерывного представления T топологической алгебры $\mathfrak{A}$ будем называть такой линейный функционал χ , определенный на произвольном двустороннем $\mathfrak{A}$ -модуле $\mathfrak{B}$, что

- 1) $\chi(ab) = \chi(ba)$ для всех $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$,
- 2) если $T(a) = 0$, то $\chi(ab) = 0$ для всех $b \in \mathfrak{B}$.

Характер χ назовем н е п р е р ы в н ы м, если линейная форма $a \mapsto \chi(ab)$ непрерывна на $\mathfrak{A}$ при любом фиксированном $b \in \mathfrak{B}$. Характером непрерывного представления локально-компактной группы G будем называть характер соответствующего представления алгебры $\mathcal{M}(G)$. Ясно, что характер, который определен на $C_0^\infty(G)$ и является обобщенной функцией на G , непрерывен в указанном выше смысле. Характеры бесконечномерных представлений групп Ли впервые рассматривали Гельфанд и Наймарк ⁽¹⁾, трактовавшие характеры как обобщенные функции. Можно доказать, что всякое непрерывное вполне неприводимое представление полупростой линейной группы Ли в любом локально-выпуклом пространстве имеет ненулевой характер, являющийся обобщенной функцией. В общем случае характер непрерывного неприводимого (даже унитарного) представления группы Ли не обязан сводиться к обобщенной функции.

Т е о р е м а 1. Простое непрерывное представление T топологической алгебры $\mathfrak{A}$ в произвольном локально-выпуклом пространстве, имеющее непрерывный характер $\chi \neq 0$, определяется функционалом χ с точностью до изоморфизма (так что непрерывные простые представления, имеющие одинаковые непрерывные ненулевые характеры, изоморфны).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть I_χ — замкнутый двусторонний идеал в $\mathfrak{A}$, состоящий из всех таких элементов $a \in \mathfrak{A}$, что $\chi(ab) = 0$ для всех $b \in \mathfrak{B}$. Идеал I_χ не совпадает с $\mathfrak{A}$ (иначе $\chi(b) = \chi(1 \cdot b) = 0$ для всех $b \in \mathfrak{B}$) и содер-

жит максимальный идеал $\text{Ker } T$, т. е. $\text{Ker } T = I_\chi$. Теорема доказана, так как идеал I_χ зависит только от χ .

Следствие 1. *Неприводимое конечномерное представление $a \mapsto T(a)$ алгебры $\mathfrak{A}$ определяется своим классическим характером $a \mapsto \text{tr } T(a)$ с точностью до обычной эквивалентности.*

Следствие 2. *Пусть T — произвольное непрерывное вполне неприводимое представление локально-компактной группы G с массивной компактной подгруппой (например, линейной полупростой группы Ли), и пусть χ — такой функционал, определенный на плотном идеале I в $\mathfrak{A}$, что $\chi(b) = \text{tr } T(b)$, если $b \in I$ и $T(b)$ — конечномерный оператор.*

Тогда представление T определяется функционалом χ с точностью до эквивалентности по Наймарку.

Действительно, можно проверить, что сужение функционала χ на идеал, состоящий из всех таких элементов $b \in I$, что $T(b)$ — конечномерный оператор, является ненулевым непрерывным характером представления T . Поэтому следствие 2 вытекает из теоремы 1 и леммы. Для непрерывных представлений полупростых групп Ли в банаховых пространствах теоремы о характерах см. в (3) и (5). Теорию характеров унитарных представлений групп см. в (4).

4. В дальнейшем для простоты изложения будем предполагать, что E — квазиполное бочечное пространство (например, банахово, полное метризуемое или рефлексивное пространство). В этом случае каждый оператор из $\mathcal{P}(E)$ является непрерывным, а для непрерывности представления локально-компактной группы в пространстве E достаточно, чтобы матричные элементы этого представления были непрерывными функциями.

Линейный оператор $A \in \mathcal{P}(E)$ называется ядерным, если он имеет вид $x \mapsto Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x_n', x \rangle x_n$, где $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность

в E , $\{x_n'\}$ — слабо (и сильно) ограниченная последовательность в E' , а $\{\lambda_n\}$ — такая числовая последовательность, что $\sum |\lambda_n| < \infty$. Указанное разложение оператора в сумму одномерных проекторов будем называть правильным. Ряд $\sum \lambda_n \langle x_n', x \rangle x_n$ всегда сходится; если сумма этого ряда не зависит от правильного разложения оператора, то она называется следом этого оператора и обозначается через $\text{tr } A$. Если пространство E имеет базис Шаудера, то всякий ядерный оператор в E имеет однозначно определенный след. С другой стороны, существует рефлексивное банахово пространство, в котором не всем ядерным операторам можно однозначно приписать след (см. (4, 10)).

Пусть T — непрерывное представление топологической алгебры $\mathfrak{A}$ в пространстве E , и пусть это представление продолжено на двусторонний $\mathfrak{A}$ -модуль $\mathfrak{B}$, т. е. каждому элементу $b \in \mathfrak{B}$ так сопоставлен оператор $T(b) \in \mathcal{P}(E)$, что $T(ab) = T(a)T(b)$ и $T(ba) = T(b)T(a)$ для всех $a \in \mathfrak{A}$. Характер χ представления T , определенный на $\mathfrak{B}$, будем называть каноническим, если:

1) для каждого элемента $b \in \mathfrak{B}$ оператор $T(b)$ является ядерным и допускает такое правильное разложение $T(b): x \mapsto \sum \lambda_n \langle x_n', x \rangle x_n$, что $\chi(ab) = \sum \lambda_n \langle x_n', T(a)x_n \rangle$ для всех $a \in \mathfrak{A}$,

2) $\chi(b) = 0$, если $T(b) = 0$.

Таким образом, $\chi(b) = \chi(1 \cdot b) = \sum \lambda_n \langle x_n', x_n \rangle$, т. е. $\chi(b) = \text{tr } T(b)$, если след оператора $T(b)$ однозначно определен. С другой стороны, если оператор $T(b)$ имеет однозначно определенный след для каждого элемента $b \in \mathfrak{B}$, то функционал $b \mapsto \text{tr } T(b)$ является каноническим характером представления T .

Теорема 2. *Канонический характер χ непрерывного представления T локально-компактной группы G в квазиполном бочечном пространстве E всегда непрерывен.*

Для доказательства достаточно любому элементу b из области определения характера χ сопоставить такую непрерывную функцию $\varphi(g)$ на G , что $\chi(ab) = \int \varphi(g) da(g)$ для всех $a \in \mathcal{M}(G)$. Следует положить $\varphi(g) = \sum \lambda_n \langle x_n', T_g x_n \rangle$, где $\{\lambda_n\}$, $\{x_n\}$, $\{x_n'\}$ — последовательности, определяющие правильное разложение оператора $T(b)$, упоминаемое в определении канонического характера.

5. Определение канонического характера можно обобщить на случай представлений в произвольных локально-выпуклых пространствах, если вместо ядерных операторов рассматривать операторы Фредгольма (см. (4)). Теорема 2 переносится на этот общий случай, если требовать, чтобы соответствие $(g, x) \mapsto T_g x$ было непрерывным отображением $G \times E \rightarrow E$. Результаты настоящей работы справедливы (с небольшими оговорками) для алгебр, имеющих не двустороннюю, а левую или правую единицу. Такие топологические алгебры возникают, например, в связи с операторами обобщенного сдвига.

Автор выражает глубокую благодарность Д. П. Желобенко, беседы с которым стимулировали настоящую работу и повлияли на ее содержание.

Поступило
30 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 36, 1 (1950).
- ² R. Godement, Trans. Am. Math. Soc., 73, № 3, 496 (1952).
- ³ Harish-Chandra, Trans. Am. Math. Soc., 76, 234 (1954).
- ⁴ A. Grothendieck, Mem. Am. Math. Soc., 16, 1 (1955).
- ⁵ Ф. А. Березин, Тр. Моск. матем. общ., 6, 371 (1957).
- ⁶ М. А. Наймарк, ДАН, 137, № 2, 278 (1961).
- ⁷ J. M. G. Fell, Acta Math., 114, № 3—4, 491 (1965).
- ⁸ Harish-Chandra, Acta Math., 116, 1 (1966).
- ⁹ Г. Л. Литвинов, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, МГУ, 16, 267 (1972).
- ¹⁰ P. Enflo, Acta Math., in press.
- ¹¹ R. Godement, Ann. Math., 59, № 1, 47 (1954).
- ¹² F. Bruhat, Bull. Soc. Math. France, 84, 97 (1956).