Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 3

УДК 513.83 *МАТЕМАТИКА*

А. Г. НЕМЕЦ

О БИКОМПАКТНЫХ РАСШИРЕНИЯХ, НЕ ПОВЫШАЮЩИХ ВЕСА И РАЗМЕРНОСТИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 28 V 1973)

Будем говорить, что бикомпактное расширение bX пространства X не повышает веса (размерности) подпространства $A\subset X$, если $w(bX[A])=wA$ $(\dim(bX[A])\leqslant\dim A)$ *.

В работе А. Н. Тихонова (1) доказано, что любое вполне регулярное пространство веса τ имеет бикомпактное расширение того же веса.

Е. Г. Скляренко, обобщая теоремы В. Гуревича (2), доказал в работе (3) следующие теоремы:

ТС 1. *Всякое нормальное пространство имеет бикомпактное расширение того же веса и размерности.*

ТС 2. *Для любой счетной системы замкнутых множеств F_k нормального пространства X существует бикомпактное расширение bX пространства X того же веса и такое, что* $\dim(bX[F_k])=\dim F_k$ *для каждого* k.

Затем А. В. Зарелуа (4) усилил теорему ТС 2: у него семейство замкнутых множеств не счетное, а мощности, не превосходящей wX.

Б. А. Пасынковым были поставлены вопросы о том, когда у пространства с выделенной системой замкнутых множеств существует бикомпактное расширение, не повышающее веса (и веса и размерности) каждого множества этой системы.

В п. 1 настоящей работы исследуется первый вопрос, т. е. вопрос об обобщении теоремы А. Н. Тихонова.

В п. 2 будет приведен без доказательства результат, дающий положительный ответ на вопрос, касающийся и веса и размерности, для локально-конечного семейства замкнутых подмножеств нормального пространства. Здесь же сформулирована факторизационная теорема, обобщающая известную теорему С. Мардешича (5).

Терминология и обозначения. Если, например, Ω — некоторая система множеств, то $\widetilde{\Omega}$ будет обозначать тело этой системы. Если Ω — подсистема системы Θ, то Ω^* (если необходимо, через $\Omega_\Theta{}^*$) будет обозначать подсистему системы Θ, состоящую из всех элементов, не входящих в систему Ω. Конечную систему множеств будем называть центрированной, если она имеет непустое пересечение.

Через I будем обозначать отрезок $[0;1]$. Под функцией будет пониматься непрерывная функция со значениями в I. Будем говорить, что функция f, определенная на пространстве X, отделяет подмножества A и B, если $I[fA]\cap I[fB]=\Lambda$.

Семейство функций $\{f_\alpha|\alpha\in A\}$ определяет отображение пространства X в тихоновское произведение A штук единичных отрезков по правилу $x\mapsto\{i_\alpha\}=\{f_\alpha(x)\}$. Это отображение будет называться диагональным произведением отображений f_α. Известно, что, для того чтобы диагональное произведение семейства функций определяло вложение вполне регуляр-

---

* Здесь и далее символ вида $Y[A]$ обозначает замыкание множества $A\subset Y$ в пространстве Y.

ного пространства в тихоновский куб, необходимо и достаточно, чтобы это семейство отделяло точки от не содержащих их замкнутых множеств. Непрерывное отображение $b_1X \to b_2X$ одного бикомпактного расширения пространства X на другое, тождественное на точках пространства X, называется допустимым.

1. Стандартная техника доказательства теоремы А. Н. Тихонова (см., например, П. С. Александров ([6])) позволяет доказать следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть X — вполне регулярное пространство веса τ и Y — его бикомпактное расширение.*

Тогда существует бикомпактное расширение Z веса τ пространства X, предшествующее расширению Y.

Предложение. *Пусть X — вполне регулярное пространство, Y — его бикомпактное расширение, вес замкнутого подмножества F пространства X равен τ.*

Тогда существует бикомпактное расширение Z пространства X, предшествующее расширению Y и такое, что $w(Z[F])=\tau$.

Доказательство. Согласно лемме 1, существует бикомпактное расширение R пространства F, предшествующее бикомпактному расширению $Y[F]$ пространства F и такое, что $w(R)=\tau$. Если $\mathscr{D}$ — непрерывное разбиение пространства $Y[F]$, индуцированное допустимым отображением $Y[F]\to R$, то разбиение $\mathscr{D}^*$ пространства Y, элементами которого служат элементы разбиения $\mathscr{D}$ и отдельные точки пространства $Y\setminus Y[F]$, будет, очевидно, непрерывным — насыщение по $\mathscr{D}^*$ любого замкнутого в Y множества замкнуто в Y. Пространство разбиения $\mathscr{D}^*$ и будет, очевидно, искомым бикомпактным расширением Z пространства X, причем пространство $Z[F]$ гомеоморфно пространству R.

Замечание. Предыдущее предложение обобщается по индукции на любое конечное семейство замкнутых подмножеств.

Аналогичное утверждение для случая, когда семейство замкнутых подмножеств счетно (и даже дизъюнктно), уже неверно, как показывает следующий

Пример. Пусть S — счетное дискретное пространство, представленное в виде счетного объединения счетных непересекающихся подпространств, $S=\bigcup\limits_{i\in N} F_i$, и пусть $T=\beta S$ — его стоун-чеховское расширение, а $M_i=T[F_i]\simeq \simeq\beta F_i$. Положим $X=(T\setminus \bigcup\limits_{i\in N} M_i)\cup S$. Имеем:

а) Пространство X нормально. Действительно, пространство $\bigcup\limits_{i\in N} M_i$ локально-бикомпактно, как дискретная в себе сумма бикомпактов, следовательно, подпространство $T\setminus\bigcup M_i$ замкнуто в T, поэтому подпространство $X=(T\setminus\bigcup M_i)\cup S$ — множество типа F_σ в T.

б) Очевидно, множество F_i замкнуто в X.

в) Пусть существует бикомпактное расширение Y пространства X такое, что $w(Y[F_i])=\aleph_0$ для каждого $i=1, 2, \ldots$ Поскольку $T\simeq\beta X$, то существует допустимое отображение φ: $T\to Y$, тождественное на X. Так как $w(M_i)>\aleph_0$, то для каждого $i=1, 2, \ldots$ существует пара различных точек m_{i1}, m_{i2}, принадлежащих $M_i\setminus F_i$, склеиваемая отображением φ. Множества $P_1=\bigcup\limits_{i\in N} m_{i1}$ и $P_2=\bigcup\limits_{i\in N} m_{i2}$ суть, очевидно, непересекающиеся замкнутые множества нормального пространства $\bigcup\limits_{i\in N} M_i$, и так как $T\simeq\beta(\bigcup M_i)$, то $T[P_1]\cap T[P_2]=\Lambda$. Кроме того, множества $T[P_1]\setminus P_1$ и $T[P_2]\setminus P_2$ лежат в X. Поэтому, если $\mathscr{D}$ — разбиение пространства T, индуцированное отображением φ, то, с одной стороны, оно непрерывно, а с другой стороны, насыщение по $\mathscr{D}$ замкнутого множества $T[P_1]$ не замкнуто, так как содержит P_2, но не содержит $T[P_2]$. Противоречие.

Лемма 2. *Если $\mathscr{F}=\{F_\alpha \mid \alpha\in A\}$ — локально-конечная система подмножеств пространства X, то $|\mathscr{F}|\leqslant w(X)$.*

Теорема 1. *Пусть X — вполне регулярное пространство, $\mathcal{F}=\{F_\alpha | \alpha\in A\}$ — локально-конечное семейство его замкнутых подмножеств.*

Тогда существует бикомпактное расширение Z пространства X такое, что $w(Z[F_\alpha])=w(F_\alpha)$ для каждого $\alpha\in A$.

Доказательство. Поскольку можно считать, что $X\in\mathcal{F}$, то достаточно доказать теорему для случая $X=\bigcup\limits_{\alpha\in A}F_\alpha$. Рассмотрим семейство $\mathcal{S}=\{S\}$ конечных центрированных подсемейств семейства $\mathcal{F}$. Возьмем для каждого $S=\{F_{\alpha i}\}_{i=1}^{n}\in\mathcal{S}$ множество $\Phi(S)$ всех функций, продолжаемых на некоторое фиксированное бикомпактное расширение B пространства $\tilde{S}$ такое, что $w(B[F_{\alpha i}])=wF_{\alpha i}$ для каждого $i=1,\ldots,n$. Очевидно, что диагональное произведение функций из $\Phi(S)$ определяет вложение пространства $F_{\alpha i}\in S$ в бикомпакт веса $wF_{\alpha i}$. Выберем подмножество $\Phi'(S)\subset\Phi(S)$ всех тех функций из $\Phi(S)$, которые обращаются в нуль на множестве $\tilde{S}\cap\tilde{S}^*$. Диагональное произведение функций из $\Phi'(S)$ определяет отображение (не обязательно вложение) множества $F_{\alpha i}$ в бикомпакт веса $\leqslant w(F_{\alpha i})$. Продолжим функции из $\Phi'(S)$ на все множество $\tilde{S}^*$ нулем. Продолженные функции будут определены на всем пространстве X, ибо $X=\tilde{S}\cup\tilde{S}^*$, и непрерывны на нем. Эти функции составляют семейство $\Psi(S)$. Возьмем семейство $\Psi=\bigcup\limits_{S\in\mathcal{S}}\Psi(S)$. Это семейство таково, что для множества $F_\alpha\in\mathcal{F}$ лишь функции из $\Psi(S)$, где $S\ni F_\alpha$, могут отличаться от нуля на F_α. Но, в силу леммы 2, $|\{S\in\mathcal{S}|S\ni F_\alpha\}|\leqslant w(F_\alpha)$. Поэтому диагональное произведение θ функций из Ψ определяет отображение каждого множества F_α в произведение не более $w(F_\alpha)$ штук бикомпактов веса $\leqslant w(F_\alpha)$.

Осталось доказать, что отображение θ — вложение в тихоновский куб I^Ψ. Действительно, пусть замкнутое множество $E\subset X$ не содержит точку $x\in X$. Пусть $x\in\tilde{S}$ и $x\notin\tilde{S}^*$ для некоторого $S\in\mathcal{S}$. Существует функция φ из $\Phi'(S)$ такая, что $\varphi(x)=1$, $\varphi((E\cup\tilde{S}^*)\cap\tilde{S})=0$. Тогда функция $\psi\in\Psi$, являющаяся продолжением функции φ на все пространство X нулем, отделяет точку x от множества E. Итак, $Z=I^\Psi[\theta(X)]$ — искомое бикомпактное расширение. Теорема доказана.

2. Систему $\{F_\alpha;\ \alpha\in A\}$ подмножеств пространства Y будем называть почти локально-конечной, если любая точка $y\in Y$ кроме, быть может, одной точки обладает окрестностью, пересекающей лишь конечное число элементов системы.

Теорема 2 (факторизационная). *Пусть f: $X\to Y$ — отображение бикомпакта X на бикомпакт Y. Пусть $\{E_\alpha;\ \alpha\in A\}$ — система замкнутых подмножеств бикомпакта X, $\{F_\alpha;\ \alpha\in A\}$ — почти локально-конечная система замкнутых множеств бикомпакта Y, и пусть $fE_\alpha=F_\alpha$.*

Тогда существуют бикомпакт Z и отображения g: $X\to Z$ и h: $Z\to Y$ такие, что:

а) $\dim gE_\alpha\leqslant\dim E_\alpha$, $\alpha\in A$;

б) $w(gE_\alpha)=wF_\alpha$, $\alpha\in A$;

в) $h\circ g=f$.

Теорема 3. *Пусть $\{E_\alpha,\ \alpha\in A\}$ — локально-конечная система замкнутых множеств нормального пространства T.*

Тогда существует бикомпактное расширение bT пространства T такое, что $\dim(bT[E_\alpha])\leqslant\dim E_\alpha$, $w(bT[E_\alpha])=wE_\alpha$ *для каждого* $\alpha\in A$.

В заключение автор приносит глубокую благодарность проф. Б. А. Пасынкову за постоянное внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
14 III 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов, Math. Ann., 102, 544 (1929). [2] W. Hurewicz, Proc. Amst. Acad., 30 (1927). [3] Е. Г. Скляренко, ДАН, 123, № 1 (1958). [4] А. В. Зарелуа, Сиб. матем. журн., 5, № 3, 532 (1964). [5] S. Mardešić, Ill. J. Math., 4, № 2, 278 (1960). [6] П. С. Александров, УМН, 2, № 1, 5 (1947).