Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 5

УДК 513 МАТЕМАТИКА

В. С. СОБЧУК

О ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКОМ ОТОБРАЖЕНИИ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком А. Д. Александровым 15 II 1973)

1. Рассмотрим отображение риманова пространства V_n на $\bar{V}_n$. Пусть, кроме того, в каждой точке пространства V_n задано линейное преобразование касательного пространства в касательное пространство в соответствующей по отображению точке пространства $\bar{V}_n$. Отображение риманова пространства V_n на $\bar{V}_n$, следуя Н. С. Синюкову ([1]), назовем почти геодезическим отображением (п.г.о.) Π_2, если каждая геодезическая пространства V_n переходит в почти геодезическую пространства $\bar{V}_n$, т. е. в кривую, вдоль которой параллельно переносится двумерная площадка, образованная касательным вектором кривой и образом касательного вектора геодезической при линейном преобразовании касательных пространств. Как показал Н. С. Синюков, п.г.о. Π_2 характеризуется условиями

$$\Gamma_{ij}^h=\bar{\Gamma}_{ij}^h+\varphi_i\delta_j^h+\varphi_j\delta_i^h+\psi_i\mu_j^h+\psi_j\mu_i^h, \tag{1}$$

$$\mu^h_{(i|j)}+\psi_{(j}\mu^\alpha_{i)}\mu_\alpha^h=\sigma_{(i}\delta^h_{j)}+\nu_{(i}\mu^h_{j)}, \tag{2}$$

где Γ_{ij}^h, $\bar{\Gamma}_{ij}^h$ — символы связности пространств V_n и $\bar{V}_n$; φ_i, ψ_i, σ_i, ν_i — векторы, μ_i^h — аффинор, задающий линейное преобразование касательных пространств, $|$ — знак ковариантной производной относительно $\bar{\Gamma}_{ij}^h$, круглые скобки — знак симметрирования по заключенным в скобки индексам. Если $\psi_i=0$ или $\mu_i^h=\mu\cdot\delta_i^h$, то Π_2 вырождается в геодезическое.

Через g_{ij} и $\bar{g}_{ij}$ обозначим метрические тензоры пространств V_n и $\bar{V}_n$ и находим эквивалентное (1) условие

$$g_{ij|l}=2\varphi_l g_{ij}+\varphi_i g_{jl}+\varphi_j g_{il}+\psi_l\mu_{ij}+\psi_l\mu_{ji}+\psi_i\mu_{lj}+\psi_j\mu_{li}, \tag{3}$$

где $\mu_{ij}=g_{i\alpha}\mu_j^\alpha$.

Пусть ξ^i — вектор в касательном пространстве в некоторой точке пространства V_n. Сопряженным к ξ^i назовем вектор $\xi_i=\bar{g}_{i\alpha}\xi^\alpha$ в касательном пространстве в соответствующей точке пространства $\bar{V}_n$.

Теорема 1. *Если между римановыми пространствами V_n и $\bar{V}_n$ установлено п.г.о. Π_2 и при этом линейное преобразование касательных пространств состоит в том, что каждому вектору ставится в соответствие сопряженный вектор, т. е. аффинор μ_i^h удовлетворяет условию*

$$\mu_{ij}=\bar{g}_{ij}, \tag{4}$$

то пространство $\bar{V}_n$ допускает обобщенно рекуррентный тензор; если при этом $p\geq 3$, где p — число различных корней уравнения $|\lambda g_{ij}-\bar{g}_{ij}|=0$, то Π_2 вырождается в аффинное отображение.

Доказательство. Подставляя (4) в (3), обнаруживаем, что $\bar{V}_n$ допускает обобщенно-рекуррентный тензор ([2]). Из (4) находим

$$\mu_i^h=\bar{g}_{i\alpha}g^{\alpha h}. \tag{4'}$$

Если с помощью (4′) вычислить свертку $\mu_i^\alpha\mu_\alpha^h$, а с помощью (4) и (3) — производную $\mu_{i|j}^h$, подставить найденные выражения в (2), то после свертывания с g_{hk} получим

$$a_i g_{jk}+a_j g_{ik}-2\varphi_k\bar{g}_{ij}+b_i\bar{g}_{jk}+b_j\bar{g}_{ik}-2\psi_k\tilde{g}_{ij}-\psi_i\tilde{g}_{jk}-\psi_j\tilde{g}_{ik}=0, \tag{5}$$

где обозначено

$$a_i=-\sigma_i-\bar{g}_{i\alpha}g^{\alpha\beta}\varphi_\beta,\quad b_i=-2\varphi_i-\nu_i-\bar{g}_{i\alpha}g^{\alpha\beta}\psi_\beta,$$
$$\tilde{g}_{ij}=g^{\alpha\beta}\bar{g}_{\alpha i}\bar{g}_{\beta j}. \tag{6}$$

Зафиксируем точку $(x^1,\ldots,x^n)$. Пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ — различные корни уравнения $|\lambda g_{ij}-\bar{g}_{ij}|=0$. Обе матрицы (g_{ij}) и $(\bar{g}_{ij})$ могут быть приведены к блочному виду

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}\boxed{g_{i_1j_1}} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{g_{i_pj_p}}\end{pmatrix},\quad (\bar{g}_{ij})=\begin{pmatrix}\boxed{\bar{g}_{i_1j_1}} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\bar{g}_{i_pj_p}}\end{pmatrix},$$

т. е.

$$g_{i_\alpha j_\beta}=\bar{g}_{i_\alpha j_\beta}=\tilde{g}_{i_\alpha j_\beta}=0,\quad \alpha\neq\beta. \tag{7}$$

Если корень λ_α имеет кратность m_α, то

$$g^{i_\alpha j_\alpha}\bar{g}_{i_\alpha j_\alpha}=m_\alpha\lambda_\alpha,\quad g^{i_\alpha j_\alpha}g_{i_\alpha j_\alpha}=m_\alpha. \tag{8}$$

Положив в (5) $i=i_\alpha$, $j=j_\alpha$, $k=k_\beta$, $\alpha\neq\beta$ и учитывая (7) и (8), находим

$$\lambda_\alpha\varphi_{k_\beta}+\psi_{k_\beta}=0. \tag{9}$$

Если $p\geqslant3$, то в (9) вместо α подставим $\gamma\neq\alpha$, β. Из полученного равенства и (9) имеем $\psi_{k_\beta}(\lambda_\alpha-\lambda_\gamma)=0$. Но $\lambda_\alpha\neq\lambda_\gamma$, следовательно, $\psi_k=0$, а тогда из (9) получаем, что и $\varphi_k=0$, т. е. Π_2 вырождается в аффинное отображение.

Теорема 2. *Если риманово пространство V_n допускает n-ортогональную систему гиперповерхностей и п.г.о. Π_2 пространства V_n на $\bar{V}_n$ сохраняет n-ортогональную систему, и если в этой n-ортогональной системе координат аффинор μ_i^h диагонален, а число его различных собственных значений равно p, то при $p=1$ отображение Π_2 вырождается в геодезическое, при $p=2$ существует невырожденное Π_2, при $p\geqslant3$ Π_2 вырождается в аффинное. При этом в случае $p\geqslant2$ метрика пространств V_n и $\bar{V}_n$ приводима.*

Доказательство. Если гиперповерхности n-ортогональной системы принять за координатные, то будем иметь

$$g_{ij}=\bar{g}_{ij}=\mu_i^j=0,\quad i\neq j. \tag{10}$$

Из (1) и (10) получаем

$$(1/\bar{g}_{jj})\partial\bar{g}_{ii}/\partial x^j=(1/g_{jj})\partial g_{ii}/\partial x^j,\quad i\neq j, \tag{11}$$
$$\partial\ln g_{ii}/\partial x^j=\partial\ln\bar{g}_{ii}/\partial x^j+2\varphi_j+2\psi_j\mu_i^i,\quad i\neq j, \tag{12}$$

а из (2) и (10) находим

$$(\partial\bar{g}_{ii}/\partial x^j)(\mu_j^j-\mu_i^i)=0,\quad i\neq j. \tag{13}$$

Пусть среди μ_i^i имеется p различных. Если $p\geqslant3$, то из (13), (11) и (12) получаем $\varphi_i=\psi_i=0$, т. е. Π_2 вырождается в аффинное. Если же $p=1$, т. е. $\mu_1^1=\ldots\mu_n^n=\mu$, то $\mu_i^h=\mu\delta_i^h$ и Π_2 вырождается в геодезическое. При $p=2$ возможно невырожденное Π_2. Кроме того, при $p\geqslant2$ из (13) и (11) получаем, что метрики пространств V_n и $\bar{V}_n$ приводимые.

2. Как известно, невырожденное геодезическое отображение на симметрические римановы пространства $\bar{V}_n$ $(n\geqslant3)$ допускают лишь пространства постоянной кривизны V_n (теорема Н. С. Синюкова [3]). В частности, геодезическое отображение на пространства постоянной кривизны (в том числе и плоские) допускают только пространства постоянной кривизны (теорема Бельтрами [4]). В связи с этим интересно выяснить, не изменится ли ситуация, если вместо геодезического отображения рассмотреть п.г.о.? Другими словами, существует ли риманово пространство переменной кривизны, допускающее невырожденное п.г.о. на симметрическое пространст-

во (в частности, на пространство постоянной кривизны)? Мы дадим утвердительный ответ на этот вопрос построением соответствующих примеров.

Пусть метрика плоского $\overline{V}_3$: $d\bar{s}^2=dx^2+dy^2+dz^2$; тогда $\overline{\Gamma}_{ij}^h=0$. Положим $\mu_1^1=1$, $\mu_1^2=1$, остальные $\mu_i^h=0$. Тогда $\mu_{i|j}^h=0$ и условия (2) п.г.о. эквивалентны следующим:

$$\sigma_i=-\psi_i, \quad \nu_i=2\psi_i.$$

А из (1) находим

$$\Gamma_{11}^h=2f_1\delta_1^h+2\psi_1\delta_2^h, \quad \Gamma_{ab}^h=f_b\delta_a^h+f_a\delta_b^h, \quad a, b=2, 3,$$
$$\Gamma_{1a}^h=f_a\delta_1^h+\psi_a\delta_2^h+f_1\delta_a^h, \quad f_i=\varphi_i+\psi_i. \tag{14}$$

Метрический тензор g_{ij} ищем из системы

$$\partial g_{ii}/\partial x^h=g_{i\alpha}\Gamma_{jh}^\alpha+g_{j\alpha}\Gamma_{ih}^\alpha, \quad x^1=x, \quad x^2=y, \quad x^3=z. \tag{15}$$

Положим

$$g_{22}=g_{23}=0, \quad g_{11}\neq 0, \quad g_{12}\neq 0, \quad g_{13}\neq 0, \quad g_{33}\neq 0. \tag{16}$$

Из (14) – (16) находим

$$f_1=f_1(x), \quad f_2=f_3=0, \quad \psi_2=\psi_2(x), \quad \psi_3=z(f_1'-f_1^2)A(x),$$
$$\psi_1={}^1/_2 y(\psi_2^1+f_1'+\psi_2^2-f_1^2)+{}^1/_4 z^2(f_1''-2f_1f_1')A(x);$$
$$g_{11}=2y(f_1+\psi_2)B(x)+z^2C(x), \quad g_{12}=B(x), \quad g_{13}=zf_1C(x), \quad g_{33}=C(x),$$

где обозначено

$$A(x)=\exp\left\{-\int (f_1+\psi_2)\,dx\right\},$$

$$B(x)=\exp\left\{\int (3f_1+\psi_2)\,dx\right\}, \quad C(x)=\exp\left\{2\int f_1\,dx\right\}.$$

Вычисляя тензор кривизны, получаем $R_{3113}=(f_1'-f_1^2)C(x)$, остальные $R_{lijk}=0$. Следовательно, при $f_1'-f_1^2\neq 0$ V_3 неплоское и, более того, не является пространством постоянной кривизны. Вычислим ковариантную производную тензора кривизны: $R_{3113,1}=(f_1''-6f_1f_1'+4f_1^3)C(x)$. Таким образом, при $f_1''-6f_1f_1'+4f_1^3\neq 0$ V_3 – несимметрическое пространство.

Кроме того, находим $R_{11}=f_1'-f_1^2$ остальные $R_{ij}=0$, а также $R=0$. Следовательно, построенное V_3 неэйнштейново при $f_1'-f_1^2\neq 0$. Впрочем, это следует уже из того, что при $f_1'-f_1^2\neq 0$ V_3 является пространством переменной кривизны.

Прямым вычислением нетрудно убедиться, что для V_3 тензор

$$R_{ijh}=R_{ij,h}-R_{ih,j}+{}^1/_4(g_{ih}R_{,j}-g_{ij}R_{,h})$$

тождественно равен нулю, т. е. V_3 является конформно-плоским.

Можно изменить аффинор и рассмотреть случай, когда $\mu_1^2=1$, остальные $\mu_i^h=0$. При этом получаем результаты, аналогичные предыдущим.

Вместо плоского пространства можно взять пространство $\overline{V}_3$ с метрикой $d\bar{s}^2=z^2dx^2+2\,dx\,dy+dz^2$. Это пространство нашел Э. Картан как пример симметрического неприводимого риманова пространства переменной кривизны. Если при этом $\mu_1^1=1$, $\mu_1^2=1$, остальные $\mu_i^h=0$, то, положив $g_{13}=g_{22}=g_{23}=0$, находим метрику отображаемого пространства V_3: $ds^2=(2y+z^2)dx^2+2x\,dy\,dx+dz^2$. Построение пространство – пространство переменной кривизны, симметрическое. Если же не требовать, чтобы $g_{13}=0$, то получаем несимметрическое V_3.

В заключение выражаю искреннюю благодарность Н. С. Синюкову за постановку задачи и большое внимание к этой работе. Считаю приятным долгом выразить глубокую признательность акад. А. Д. Александрову за полезное обсуждение заметки.

Черновицкий государственный
университет

Поступило
29 I 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. С. Синюков, ДАН, 151, № 4 (1963). [2] В. С. Собчук, ДАН, 185, № 5 (1969). [3] Н. С. Синюков, ДАН, 98, № 1 (1954). [4] Л. П. Эйзенхарт, Риманова геометрия, ИЛ, 1948.