

С. В. ХРУЩЕВ

СТИРАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ КОШИ И АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ХИНЧИНА — ОСТРОВСКОГО ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ РАСТУЩИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 4 VI 1973)

Задача о стирании особенностей обычно ставится так: пусть $E = \bar{E}$ — замкнутое подмножество комплексной плоскости C , а $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(E)$ — некоторый класс функций, аналитических вне множества E ; требуется выяснить, для каких множеств E класс $\mathfrak{F}(E)$ состоит из констант. В этой статье изучается следующая конкретизация указанной задачи. Множество E лежит на единичной окружности T , X — пространство аналитических в единичном круге функций, а $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(X, E)$ — класс функций $f \in X$, представимых в виде интеграла Коши меры μ с носителем на E :

$$f(z) = \int_E \frac{d\mu(\xi)}{\xi - z}, \quad |z| < 1.$$

Мы будем в качестве X рассматривать главным образом пространства, состоящие из функций, гладких вплоть до границы.

Очевидно, что функции из класса $\mathfrak{F}$ допускают аналитическое продолжение в область $C \setminus E$. Кроме того, если пространство X содержится в известном классе Харди H^1 , то продолжение функции $f \in \mathfrak{F}$ во внешность единичного круга входит по теореме Риссова ⁽¹⁾ в H^1 во внешности круга, и поэтому мера μ , представляющая функцию f , абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $\frac{1}{2\pi} d\theta$ на окружности T . Следовательно, если лебегова мера $|E|$ множества E равна нулю, то класс $\mathfrak{F}$ тривиален: $\mathfrak{F} = \{0\}$.

Пусть $X = H^p$, $1 \leq p \leq +\infty$. Тогда класс $\mathfrak{F}(E) = \{0\}$ в том и только том случае, если $|E| = 0$. Этот факт был отмечен В. П. Хавиным ⁽²⁾ и для других пространств X с достаточно слабой топологией. К этому кругу вопросов также имеют отношение работы ⁽³⁾ и ⁽¹²⁾.

Если $|E| > 0$, то функция Альфорса множества E ⁽⁴⁾ входит в пространство $\mathfrak{F}(H^\infty, E)$. Поэтому, если класс $\mathfrak{F}(H^p, E) \neq \{0\}$, то он содержит функцию f , которая входит в $X = H^p$ «двусторонним образом», т. е. как вне, так и внутри единичного круга. Пусть теперь пространство X есть пространство C_A всех функций, аналитических в открытом круге $|z| < 1$ и непрерывных в замкнутом. Ясно, что для нигде не плотных множеств E на окружности T не может быть такого же «двустороннего» решения, как в случае $X = H^p$.

Теорема 1. Пусть $X = C_A$. Тогда $\mathfrak{F}(E) = \{0\}$ в том и только том случае, если $|E| = 0$. Если $|E| > 0$, то существует нетривиальная функция $\varphi \in$

$$\equiv \bigcap_{p < +\infty} L^p(E), \text{ для которой интеграл Коши } z \rightarrow \int_E \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - z} \quad |z| < 1, \text{ принадле-$$

жит классу C_A .

Пусть ω — модуль непрерывности. Через λ_0 обозначим банахово пространство функций $f \in C_A$, сужение которых на окружность T имеет модуль непрерывности $\omega_f(\delta) = o(\omega(\delta))$, $\delta \rightarrow +0$. Точность теоремы 1 иллюстрирует

Теорема 2. Для любого модуля непрерывности ω существует замкнутое множество E положительной (лебеговой) меры на окружности T , для которого $\mathfrak{F}(\lambda_\omega, E) = \{0\}$.

Если множество E содержит интервал, то функцией φ , о которой говорится в теореме 1, может быть любая гладкая функция с носителем в этом интервале. Если же множество E нигде не плотно, то строение φ значительно сложнее. Поведение ее интеграла Коши вне круга $|z| < 1$ должно быть иным, чем внутри единичного круга.

Трудности, связанные с теоремой 1, легче всего преодолеть при решении двойственной задачи, которая сводится затем к известной теореме Хинчина — Островского ⁽¹⁾. Пусть теперь, вообще, Y — банахово пространство аналитических в круге $|z| < 1$ функций, подчиненное некоторым естественным ограничениям, а X изоморфно пространству Y^* , сопряженному с пространством Y . Двойственность пространств X и Y определяется билинейной формой

$$\langle f, F \rangle = \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{-i\theta}) F(re^{i\theta}) d\theta, \quad f \in X, \quad F \in Y.$$

Через E^* обозначим множество $\{\xi: \xi \in E\}$. Легко проверить, что класс $\mathfrak{F}(X, E) = \{0\}$ в том и только том случае, если линейное пространство L , состоящее из пар (p, p) , где p — полином, плотно в пространстве $Y \times C(E^*)$. Это замечание, принадлежащее В. П. Хавину ⁽²⁾, позволяет свести задачу о нетривиальности класса $\mathfrak{F}(X, E)$ к описанию всех множеств $E = \bar{E}$ на единичной окружности, обладающих следующим свойством: если последовательность полиномов p_n стремится к 0 равномерно на E и нормы $\|p_n\|_Y$ ограничены в совокупности, то полиномы p_n стремятся к нулю равномерно внутри круга $|z| < 1$. Такое свойство естественно назвать свойством Хинчина — Островского относительно Y .

В такой постановке эта задача решалась Э. М. Кегеяном ^(3, 4) для пространства $Y = \mathfrak{F}^2$ аналитических в круге $|z| < 1$ функций, суммируемых с квадратом по площади. Кегейн показал, что если замкнутое множество E положительной меры удовлетворяет условию Карлесона

$$\sum_v l_v \log(1/l_v) < +\infty,$$

где $(l_v)_{v \geq 1}$ — последовательность всех интервалов, дополнительных к E^* , то E обладает свойством Хинчина — Островского относительно $\mathfrak{F}^2$ ⁽⁵⁾. Кроме того существуют множества E положительной меры, для которых это свойство нарушается ⁽⁶⁾.

Пусть $\lambda(x)$ — положительная функция на $[0, +\infty)$ и $\lambda(x) \nearrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Предположим, что вес λ удовлетворяет условиям:

А) Функция $x \rightarrow x \log \lambda(1/x)$ полуаддитивна в окрестности 0.

Условие А) выполнено, если эта функция вогнута.

В) Функция $x \rightarrow x \log \lambda(1/x)$ не убывает в окрестности 0.

Через $A(\lambda)$ обозначим множество всех функций, аналитических в круге $|z| < 1$ и таких, что $f(z) = o(\lambda(1/(1-|z|)))$, $|z| \rightarrow 1-0$.

Определение. Замкнутое множество $E \subset T$ удовлетворяет λ -условию Карлесона, если $\sum_v l_v \log \lambda(1/l_v) < +\infty$ (l_v — длины дополнительных к E интервалов).

Теорема 3. Предположим, что замкнутое множество E положительной меры на окружности T не содержит подмножеств положительной меры, удовлетворяющих λ -условию Карлесона.

Тогда существует такая последовательность полиномов p_n , $n=1, 2, \dots$, что

* Мы обозначаем интервал и его длину одной буквой.

- I) $p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ в топологии пространства $A(\lambda)$ и, следовательно, равномерно внутри круга $|z| < 1$;
 II) $p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ равномерно на множестве E .

Пусть, кроме свойств A) и B), вес λ обладает свойством

$$C) \int_0^\delta \log \lambda(1/x) dx = O(\delta \log \lambda(1/\delta)), \quad \delta \rightarrow +0.$$

Тогда справедлива

Теорема 4. Пусть замкнутое множество E положительной меры удовлетворяет λ -условию Карлесона. Предположим, что нормы последовательности полиномов p_n в пространстве $A(\lambda)$ равномерно ограничены и $p_n \rightarrow 0$ в пространстве $L^1(E)$.

Тогда $p_n \rightarrow 0$ равномерно внутри единичного круга.

Теоремы 3 и 4, очевидно, дают полное описание множеств E со свойством Хинчина — Островского для пространств $A(\lambda)$. Отметим, что условия A) — C) справедливы для таких функций:

$$\lambda(x) = \log \log \dots \log x; \quad \lambda(x) = x^\alpha, \quad \alpha > 0; \quad \lambda(x) = \exp x^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Так как пространство $A(\lambda) \subset \mathfrak{H}^2$ для $\lambda(x) = x^{\eta_1}$ и $\mathfrak{H}^2 \subset A(\lambda)$ для $\lambda(x) = x$, то достаточное условие, найденное Кегейном для пространства $\mathfrak{H}^2$, совпадает с необходимым.

Теоремы 3 и 4 позволяют решить задачу об устранимых особенностях для многих пространств X .

Теорема 5. Пусть замкнутое множество E положительной меры удовлетворяет условию Карлесона $\sum_v l_v \log(1/l_v) < +\infty$.

Тогда существует нетривиальная ограниченная функция φ на множестве E , для которой интеграл Коши $z \rightarrow \int_E \varphi(\xi) d\xi / (\xi - z)$, $|z| \leq 1$, бесконечно дифференцируем в круге $|z| \leq 1$.

Теорема 6. Если множество $E = \bar{E}$ положительной меры не содержит подмножеств положительной меры, удовлетворяющих условию Карлесона, а класс X состоит из функций f , дробная производная которых $f^{[\alpha]}$ входит в H^2 при каком-нибудь $\alpha > 0$, то $\mathfrak{F}(X, E) = \{0\}$.

Интересно отметить, что здесь проявляется тот же эффект, что и в теоремах о множествах единственности для гладких функций (⁷). Если на множестве E можно расположить меру μ с интегралом Коши, подчиненным слабым условиям гладкости, то можно построить меру с очень гладким интегралом Коши. Отметим еще, что известные теоремы о соответствующей «двусторонней» задаче об устранимых особенностях функций с ограниченным интегралом Дирихле формулируются в емкостных терминах (⁸, ⁹).

Пусть $0 < \alpha \leq 1$, а G_α — класс функций f , аналитических в единичном круге, для которых существует такое число $q = q(f) > 0$, что

$$\sup_{|z| \leq 1} |f^{(n)}(z)| \leq q^n n! n^{\alpha/n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Теорема 7. Класс $\mathfrak{F}(G_\alpha, E) \neq \{0\}$ в том и только том случае, если E содержит подмножество F положительной меры, для которого

$$\sum_v l_v^{1-\alpha} < +\infty.$$

Если класс $X = G_1$, то $\mathfrak{F}(X, E) = \{0\}$ в том и только том случае, если нигде не плотно в T . Это утверждение справедливо для всех неквазианн

литических классов Карлемана * функций X , содержащихся в пространстве G_1 . Если же класс Карлемана X функций, аналитических в круге $|z| < 1$, квазианалитичен, то $\mathfrak{F}(X, E) = \{0\}$ для любого замкнутого множества E на окружности T ($E \neq T$). Это утверждение следует из теоремы 6⁽¹²⁾. Его можно вывести из теоремы 7 и из одной теоремы Левинсона⁽¹⁰⁾.

Приведем пример множества положительной меры, никакое подмножество положительной меры которого не удовлетворяет λ -условию Карлесона. Пусть E — множество канторовского типа, полученное из отрезка $[0, 2\pi]$ в результате последовательных разбиений типа $[2; 0, 1 - \xi_k; \xi_k]$ (см. ⁽¹¹⁾), и пусть $|E| > 0$.

Теорема 8. *E не содержит подмножеств положительной меры, удовлетворяющих λ -условию Карлесона в том и только том случае, если оно само не удовлетворяет λ -условию Карлесона.*

В заключение я хочу выразить благодарность В. П. Хавину за постановку задачи и за помощь при подготовке этой работы к печати.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
4 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, 1950. ² В. П. Хавин, ДАН, 151, № 3, 505 (1963). ³ Y. Katznelson, Bull. Am. Math. Soc., 70, № 5, 722 (1964). ⁴ А. Г. Витушкин, УМН, 22, № 6 (1967). ⁵ Э. М. Кегелян, ДАН, АрмССР, 34, № 3, 133 (1960). ⁶ Э. М. Кегелян, Изв. АН АрмССР, 1, № 5, 317 (1966). ⁷ L. Carleson, Acta Math., 87, 325 (1952). ⁸ Л. Карлесон, Избранные проблемы теории исключительных множеств, 1971. ⁹ L. Ahlfors, A. Beurling, Acta Math., 83, 101 (1950). ¹⁰ N. Levinson, Gap and Density Theorems, Am. Math. Soc. Coll. Publ. XXVI, 1940. ¹¹ А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1, 1965. ¹² A. Beurling, On Quasianalyticity and General Distributions, Preprint, 1960.

* Имеется в виду неквазианалитичность класса всех граничных значений функций из пространства X .