Доклады Академии наук СССР
1974. Том. 214, № 4

УДК 523.854 АСТРОНОМИЯ

Т. А. АГЕКЯН

К ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ В ПОЛЕ РОТАЦИОННО-СИММЕТРИЧНОГО ПОТЕНЦИАЛА

(Представлено академиком А. А. Михайловым 16 IV 1973)

Как было показано в [1], в случае ротационно-симметричного потенциала уравнение движения в меридиональной плоскости может быть записано в виде

$$\frac{\partial f}{\partial R}\cos f+\frac{\partial f}{\partial z}\sin f=-\frac{\partial\beta}{\partial R}\sin f+\frac{\partial\beta}{\partial z}\cos f, \tag{1}$$

где R и z — цилиндрические координаты, $f(R, z)$ — угол между направлением движения в меридиональной плоскости и осью R,

$$\beta(R,z)={}^1/{}_2\ln\frac{U(R,z)+I}{U_0+I}, \tag{2}$$

$$U(R,z)=\Phi(R,z)-{}^1/{}_2J^2R^{-2}, \tag{3}$$

$\Phi(R, z)$ — потенциал, I и J — соответственно интегралы энергии и площадей.

Если траектория не является периодической, то ее витки в меридиональной плоскости заполняют некоторую область (область орбиты) внутри области, ограничиваемой контуром нулевой скорости, уравнение которого

$$U(R,z)+I=0. \tag{4}$$

Область орбиты, поле скоростей в ней (в общем случае двузначное), а следовательно, и граничные условия для уравнения (1) зависят не только от I и J, но и от третьего интеграла движения.

Уравнение (1) записывается в виде

$$\partial f/\partial l=\partial\beta/\partial n, \tag{5}$$

где l — направление касательной к траектории в меридиональной плоскости, n — направление нормали к траектории.

1. Некоторые соотношения в поле направлений движения. Легко проверить справедливость равенств

$$\frac{\partial}{\partial l}\frac{\partial\beta}{\partial l}=\left(\frac{\partial\beta}{\partial n}\right)^2+\frac{\partial^2\beta}{\partial R^2}\cos^2 f+\frac{\partial^2\beta}{\partial R\,\partial z}\sin 2f+\frac{\partial^2\beta}{\partial z^2}\sin^2 f, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial l}\frac{\partial\beta}{\partial n}=-\frac{\partial\beta}{\partial l}\frac{\partial\beta}{\partial n}-{}^1/{}_2\frac{\partial^2\beta}{\partial R^2}\sin 2f+\frac{\partial^2\beta}{\partial R\,\partial z}\cos 2f+{}^1/{}_2\frac{\partial^2\beta}{\partial z^2}\sin 2f, \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial\beta}{\partial l}=\frac{\partial\beta}{\partial n}\frac{\partial f}{\partial n}-{}^1/{}_2\frac{\partial^2\beta}{\partial R^2}\sin 2f+\frac{\partial^2\beta}{\partial R\,\partial z}\cos 2f+{}^1/{}_2\frac{\partial^2\beta}{\partial z^2}\sin 2f, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial\beta}{\partial n}=-\frac{\partial\beta}{\partial l}\frac{\partial f}{\partial n}+\frac{\partial^2\beta}{\partial R^2}\sin^2 f-\frac{\partial^2\beta}{\partial R\,\partial z}\sin 2f+\frac{\partial^2\beta}{\partial z^2}\cos^2 f, \tag{9}$$

которые остаются справедливыми и при замене β произвольной функцией $\psi(R, z)$, а также равенства

$$\frac{\partial}{\partial l}\frac{\partial\psi}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial\psi}{\partial l}-\frac{\partial\psi}{\partial n}\frac{\partial f}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial l}\frac{\partial f}{\partial l}. \tag{10}$$

В частности,

$$\frac{\partial}{\partial l}\frac{\partial f}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial f}{\partial l}-\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)^2-\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)^2=-\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)^2-\frac{\partial\beta}{\partial l}\frac{\partial f}{\partial n}-\gamma, \tag{11}$$

где

$$\gamma=\left(\frac{\partial\beta}{\partial n}\right)^2-\frac{\partial^2\beta}{\partial R^2}\sin^2 f+\frac{\partial^2\beta}{\partial R\,\partial z}\sin 2f-\frac{\partial^2\beta}{\partial z^2}\cos^2 f. \tag{12}$$

Обозначим

$$\chi=\frac{\partial^2 f}{\partial n^2}:\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)^3. \tag{13}$$

Используя (11), найдем, что

$$\frac{\partial\chi}{\partial l}=2\frac{\partial\beta}{\partial l}\chi+3\gamma\chi\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)^{-1}-3\frac{\partial}{\partial l}\frac{\partial\beta}{\partial n}\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)^{-2}+\left[3\gamma\frac{\partial\beta}{\partial n}-2\left(\frac{\partial\beta}{\partial n}\right)^3-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial^3\beta}{\partial R^3}\sin^3 f+3\frac{\partial^3\beta}{\partial R^2\,\partial z}\sin^2 f\cos f-3\frac{\partial^3\beta}{\partial R\,\partial z^2}\sin f\cos f+\frac{\partial^3\beta}{\partial z^3}\cos^3 f\right]\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)^{-3}. \tag{14}$$

2. Поведение функций у контура орбиты. Напишем уравнение (5) в виде

$$\pm[(\partial f/\partial n)+(\partial f/\partial l)^2]^{1/2}\sin x=\partial\beta/\partial n, \tag{15}$$

где x — угол в рассматриваемой точке между направлением $\varkappa$, в котором $\partial f/\partial\varkappa=0$, и направлением l.

Рассмотрение геометрии траекторий движения в окрестности точки касания или контура орбиты показывает, что угол x, изменяясь непрерывно, имеет до касания и после касания разные знаки, и, следовательно, в окрестности точки касания $\sin x$ есть бесконечно малая величина. Так как кривизна траектории $\partial f/\partial l$ есть конечная величина всюду, за исключением окрестностей угловых точек (точек касания контуром орбиты контура нулевой скорости), то из этого следует основной вывод, что при приближении к контуру орбиты (кроме угловых точек)

$$\partial f/\partial n\to\infty. \tag{16}$$

Имея в виду (11) и (16), найдем решение уравнения (14) в окрестности точек контура орбиты

$$\chi=\frac{\partial^2 f}{\partial n^2}:\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)^3=\frac{U+I}{c}+{}^3/_2\gamma\frac{U+I}{c}\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)^{-2}+\mathrm{o}, \tag{17}$$

где c постоянно вдоль траектории,

$$\partial c/\partial l=0, \tag{18}$$

o — член, исчезающе малый в сравнении с оставленными.

Решение уравнения (17) дает

$$\frac{\partial f}{\partial n}=\pm\left[\frac{c}{2(U+I)(n_0-n)}\right]^{1/2}+\mathrm{o}, \tag{19}$$

где $|n_0-n|$ — расстояние точки до контура орбиты.

3. Уравнение контура орбиты. Рассмотрим в области орбиты произвольную функцию $\psi(R, z)$ и произвольное направление $\lambda(R, z)$. Спра-

ведливо равенство

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}=\frac{\partial\psi}{\partial l}\cos\xi+\frac{\partial\psi}{\partial n}\sin\xi, \tag{20}$$

где ξ — угол между направлениями λ и l.

Пусть λ — направление касательной к контуру орбиты. Тогда ξ бесконечно малый угол в окрестности всех точек контура орбиты кроме угловых.

Положив в (20) соответственно $\psi=f$ и $\partial f/\partial n$, находим

$$\frac{\partial f}{\partial\lambda}=\frac{\partial f}{\partial l}+\frac{\partial f}{\partial n}\sin\xi, \tag{21}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial f}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial l}\frac{\partial f}{\partial n}+\frac{\partial^2 f}{\partial n^2}\sin\xi. \tag{22}$$

Так как $|n_0-n|$ есть расстояние точки от контура орбиты, то при дифференцировании по направлению λ следует n_0-n считать постоянным. Поэтому (22) согласно (19), (11) и (17) запишется в виде

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial c}{\partial\lambda}\frac{\partial f}{\partial n}-\frac{\partial\beta}{\partial\lambda}\frac{\partial f}{\partial n}+\mathrm{o}=-\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)^2-\frac{\partial\beta}{\partial l}\frac{\partial f}{\partial n}-\gamma+$$
$$+\frac{U+I}{c}\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)^2\frac{\partial f}{\partial n}\sin\xi+{}^3/{}_2\gamma\frac{U+I}{c}\frac{\partial f}{\partial n}\sin\xi+\mathrm{o}, \tag{23}$$

откуда, учитывая (16),

$$\frac{\partial f}{\partial n}\sin\xi=\frac{c}{U+I}\left[1+\frac{1}{2c}\frac{\partial c}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)^{-1}-{}^1/{}_2\gamma\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)^{-2}+\mathrm{o}\right]. \tag{24}$$

Таким образом, (21) можно записать в виде

$$\partial f/\partial\lambda=\partial\beta/\partial n+c/(U+I). \tag{25}$$

Определим изменение c на контуре орбиты. Положив в (10) $\psi=c$ и учитывая (18), получаем

$$\frac{\partial}{\partial l}\frac{\partial c}{\partial n}=-\frac{\partial c}{\partial n}\frac{\partial f}{\partial n} \tag{26}$$

Решение этого уравнения следует искать в виде

$$\partial c/\partial n=A\,\partial f/\partial n. \tag{27}$$

Подставляя (27) в (26) и учитывая (11), находим

$$\partial\ln A/\partial l=\partial\beta/\partial l+\gamma(\partial f/\partial n)^{-1}. \tag{28}$$

Следовательно, учитывая (2),

$$A=M(U+I)^{1/2}+\mathrm{o}, \tag{29}$$

где

$$\partial M/\partial l=0. \tag{30}$$

Таким образом, на контуре орбиты

$$\partial c/\partial n=M(U+I)^{1/2}\partial f/\partial n. \tag{31}$$

Используя (20), (18), (31) и (24), находим, что

$$\partial c/\partial\lambda=Mc/(U+I)^{1/2}. \tag{32}$$

Согласно (30) величина M на контуре орбиты должна удовлетворять уравнениям вида (31) и (32), так что

$$\partial M/\partial\lambda=Pc(U+I)^{-1/2}, \tag{33}$$

где снова

$$\partial P/\partial L=0, \tag{34}$$

и, следовательно, P удовлетворяет уравнениям, аналогичным (31) и (32).

Для ящикообразной орбиты из соображений симметрии и на основании уравнений (32) и (33) вытекает цепочка равенств

$$c(-z,R)=c(z,R), \quad \frac{\partial c}{\partial\lambda}(-z,R)=-\frac{\partial c}{\partial\lambda}(z,R),$$

$$M(-z,R)=-M(-z,R), \quad \frac{\partial M}{\partial\lambda}(-z,R)=\frac{\partial M}{\partial\lambda}(z,R),$$

$$P(-z,R)=P(z,R), \quad \frac{\partial P}{\partial\lambda}(-z,R)=-\frac{\partial P}{\partial\lambda}(z,R)$$

откуда следует

$$\partial P/\partial\lambda=Mc(U+I)^{-1/2}. \tag{35}$$

В общем случае у уравнений (33) и (35) различные начальные условия.

Исключая из (32), (33), (35) величины M и P, получаем уравнение

$$\frac{\partial^3 c}{\partial\lambda^3}+\left(3\frac{\partial\beta}{\partial\lambda}-\frac{4}{c}\frac{\partial c}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial^2 c}{\partial\lambda^2}+\left[\frac{\partial^2\beta}{\partial\lambda^2}+2\left(\frac{\partial\beta}{\partial\lambda}\right)^2-\right.$$
$$\left.-\frac{4}{c}\frac{\partial\beta}{\partial\lambda}\frac{\partial c}{\partial\lambda}+\frac{3}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial\lambda}\right)^2-\frac{c^2}{U+I}\right]\frac{\partial c}{\partial\lambda}=0, \tag{36}$$

которое совместно с уравнением (25) определяет контур ящикообразной орбиты.

Для боковых сторон ящика начальные условия для системы (25), (36) нужно задавать в точках пересечения сторон с осью R. В этих точках $f=\pi/2$, $\partial^3 c/\partial\lambda^3=\partial c/\partial\lambda=0$. Необходимо еще определить в них значение c или $\partial c/\partial\lambda$. Этот вопрос будет рассмотрен в другой статье.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
12 IV 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Т. А. Агекян, Астрон. журн., 49, 371 (1972). [2] Т. А. Агекян, Там же, 49, 1127 (1972).