Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 4

УДК 8.74 *МАТЕМАТИКА*

Е. А. АРАЙС, В. П. ШАПЕЕВ, академик Н. Н. ЯНЕНКО

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ВНЕШНИХ ФОРМ КАРТАНА НА ЭВМ

В последнее время все большее значение приобретают вопросы реализации аналитических и численно-аналитических методов на ЭВМ. Для решения этой важной задачи разработаны специализированные системы программирования, языки и вычислительные машины ([1-7]). В ([1]) были исследованы некоторые подходы к разработке программы символьных преобразований, позволяющей автоматизировать отдельные этапы метода внешних форм Картана ([8]). Предметом настоящего сообщения является реализация алгоритма Картана на ЭВМ БЭСМ-6 в системе программирования «Авто-Аналитик» ([2]).

Исследуется совместность и произвол в решении системы Пфаффа

$$du^i=a_\alpha^i(x, u, \varphi)\,du^\alpha+b_\tau^i(x, u, \varphi)\,dx^\tau, \qquad i=1, 2, \ldots, s, \quad \alpha=s+1, \ldots, r, \quad \tau=1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где u^i — неизвестные функции, x^τ — независимые переменные, коэффициенты a_α^i, b_τ^i априори нефиксированы и могут зависеть от некоторых произвольных функций $\varphi^l(x, u)$, $l=1, 2, \ldots, m$, и параметров.

Помимо прямой задачи анализа совместности конкретной системы (1) решается обратная задача: какими должны быть функции $\varphi^l(x, u)$, чтобы (1) имела заданный произвол в своем решении.

Метод Картана как алгоритм для ЭВМ был сформулирован в виде последовательности операций ([9]):

1) Получение системы уравнений, определяющих наиболее общий интегральный элемент.

2) Выбор полной, независимой и непротиворечивой подсистемы в системе определяющих уравнений.

3) Понижение ранга определяющей системы за счет условий на функции $\varphi^l(x, u)$.

4) Построение цепи интегральных элементов, вычисление характеров и проверка критерия Картана.

5) Продолжение системы Пфаффа.

6) Дифференцирование системы конечных соотношений и выбор среди них полной независимой и непротиворечивой подсистемы.

7) Дополнение системы Пфаффа и проверка непротиворечивости дополненной системы.

8) Приведение дополненной системы к исходному виду (1).

Алгоритм может работать в режиме I, когда полученные конечные соотношения присоединяются к исходной системе, или в режиме II, когда конечные соотношения удовлетворяются за счет выбора функций $\varphi^l(x, u)$. П. 3) включается в работу алгоритма только в режиме II. Следуя ([1]), в данной работе решение прямой и обратной задач теории совместности трактуется как выполнение некоторого алгебраическо-дифференциального алгоритма. Поэтому программная реализация метода Картана выполнена в виде пакета операторов, осуществляющих необходимые алгебраические и дифференциальные преобразования. Перечислим основные операторы пакета.

Оператор «Выделение подсистемы» выбирает из системы уравнений, линейных относительно заданных букв, независимую полную подсистему.

Оператор «Вычисление ранга» определяет ранг основной и расширенной матриц коэффициентов системы линейных уравнений.

Оператор «Решение системы» находит решение системы линейных уравнений.

Оператор «Понижение ранга» выписывает систему соотношений, обращающих в нуль все определители заданного порядка в главной и расширенной матрицах коэффициентов.

Оператор «Дифференцирование» вычисляет все производные от заданной сложной функции.

Оператор «Внешнее дифференцирование» определяет систему ковариантов, соответствующую системе Пфаффа.

Оператор «Дифференцирование конечных соотношений» вычисляет полный дифференциал от заданной системы конечных соотношений.

Кроме перечисленных, при реализации алгоритма Картана использовались различные модификации операторов подстановки, приведения подобных, проверки на зависимость и другие.

Функции компилирующей программы выполняет оператор «Картан», который связывает перечисленные операторы и реализует логику алгоритма. Отметим, что «Авто-Аналитик» в целом является системой модульного (операторного) программирования, имеющей специализированный язык написания модулей. Программирование алгоритма Картана показало следующие преимущества «Авто-Аналитика»: а) достигается значительная экономия оперативной памяти (соответствующая алгоритму программа занимает около 1000 ячеек памяти, что весьма немного для такого сложного метода); б) упрощается программирование; в) сокращается время отладки; г) наличие библиотеки операторов позволяет легко реализовать другие алгебраическо-дифференциальные алгоритмы.

При помощи разработанной программы решен ряд тестовых прямых и обратных задач теории совместности. Программа не требует от математика, использующего ее, знания программирования.

Авторы выражают благодарность А. В. Шутенкову и В. И. Карначуку за оказанную помощь.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и механики
Томск

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
22 X 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Шурыгин, Н. Н. Яненко, Проблемы кибернетики, в. 6 (1961). [2] Е. А. Арайс, Г. В. Сибиряков, Сборн. Вопросы программирования и автоматизации проектирования, в. 1, Томск, 1971, стр. 166. [3] В. М. Глушков, В. Г. Боднарчук и др., Кибернетика, № 3, 102 (1971). [4] Т. Н. Смирнова, Е. М. Костометова, Ю. В. Рыбакова, Зап. научн. сем. Ленинградского отд. Матем. инст. АН СССР, 23, 132 (1971). [5] D. Barton, J. P. Fitch, Commun. ACM, 14, № 8, 542 (1971). [6] Richard A. Rink, William Streifer, IEEE Trans. Comput., 20, № 8, 901 (1971). [7] Эпсилон-система автоматизации программирования задач символьной обработки, под ред. А. П. Ершова, Новосибирск, 1972. [8] С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, 1948. [9] В. П. Шапеев, Сборн. Комплексы программ математической физики, Новосибирск, 1972.