Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 6

УДК 517.9+62.503.4 *КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ*

К. А. АБГАРЯН

ОДНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЦЕССОВ НА ЗАДАННОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 6 III 1973)

Задача об устойчивости процессов на конечном промежутке времени рассматривалась многими авторами (см., например, ([1-4])). В настоящей заметке делается попытка ввести такое понятие устойчивости, которое обладало бы достаточной общностью и гибкостью и было бы применимо как для конечного, так и для неограниченного промежутка времени, сохраняя при этом определенный механический и геометрический смысл.

1. Введем в рассмотрение класс K_Δ^ω $(n\times n)$-матриц $G(t)=(G_1G_2\ldots G_n)$ над полем комплексных чисел, удовлетворяющих на промежутке $\Delta=[t_0, T)$, где T — число, превосходящее t_0, или символ ∞, условиям:

а) $\det G(t)\neq 0$;

б) эрмитова норма столбцов $G_j(t)$, $j=1, 2, \ldots, n$, совпадает с положительной функцией $\omega(t)$, т. е. $\|G_j(t)\|=\sqrt{(G_j, G_j)}=\omega(t)$, $j=1, 2, \ldots, n$.

Заданием функции $\omega(t)$ и промежутка Δ класс K_Δ^ω определяется вполне.

Предполагая, что возмущения процесса (отклонения параметров возмущенного процесса от параметров невозмущенного процесса) представляются вектор-функцией $x(t)$ (столбцовой матрицей типа $n\times 1$), понятие устойчивости процесса на промежутке $[t_0, T)$ введем следующим образом.

Определение 1. Если в заданном классе K_Δ^ω существует такая матрица $G(t)$, что при достаточно малом $\rho>0$ любое возмущение $x(t)$ процесса, начальное значение $x_0=x(t_0)$ которого удовлетворяет условию

$$(G^{-1}(t_0)x_0,\ G^{-1}(t_0)x_0)\leqslant\rho^2, \tag{1}$$

на промежутке Δ удовлетворяет условию

$$(G^{-1}(t)x,\ G^{-1}(t)x)\leqslant\rho^2, \tag{2}$$

то невозмущенный процесс у с т о й ч и в н а п р о м е ж у т к е Δ; в противном случае — н е у с т о й ч и в.

Отметим, что в предлагаемом определении устойчивости $G(t)$ не предполагается наперед заданной матрицей и, значит, не является заданной и область предельных отклонений (2). Для устойчивости процесса на промежутке $[t_0, T)$ требуется лишь существование в классе K_Δ^ω матрицы $G(t)$, допускающей выполнение условий (1), (2).

Определение 2. Невозмущенный процесс назовем р а в н о м е р н о у с т о й ч и в ы м н а п р о м е ж у т к е $[a, T)$, если он устойчив на $[t_0, T)$ при $\forall t_0\in[a, T)$.

Определение 3. Невозмущенный процесс назовем а с и м п т о т и ч е с к и у с т о й ч и в ы м н а п р о м е ж у т к е $[a, \infty)$, если: а) он устойчив на $[a, \infty)$ (в смысле определения 1) и б) для любого $t_0\in[a, \infty)$ существует такое $\rho=\rho(t_0)>0$, что все возмущения $x(t)$ процесса, удовлетворяющие условию $(G^{-1}(t_0)x(t_0),\ G^{-1}(t_0)x(t_0))\leqslant\rho^2$, обладают свойством $\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$.

В левой части неравенства (2) стоит эрмитова форма координат x_1, $x_2, \ldots, x_n$ (элементов столбцовой матрицы x), которая при любом x принимает только вещественные неотрицательные значения. Геометрически соотношение (2) в пространстве координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при каждом фиксированном t представляет собой n-мерный эллипсоид, ограниченный поверхностью

$$(G^{-1}(t)x,\ G^{-1}(t)x)=\rho^2 \tag{3}$$

со следующими свойствами.

Каждый из $2n$ лучей $x=\pm G_\sigma(t)s$, $\sigma=1, 2, \ldots$; $s>0$, пересекает поверхность (3) один раз при значении параметра $s=\rho$; точки пересечения этих лучей с поверхностью (3) находятся от начала координат ($x=0$) на расстоянии $\rho_\omega=\omega\rho$. Плоскость $x=G_is_i+G_js_j$, $i\neq j$, порожденная какой-нибудь парой столбцов матрицы G, пересекается с поверхностью (3) по эллипсу, описываемому уравнениями

$$x=G_is_i+G_js_j,\qquad s_i^2+s_j^2=\rho^2, \tag{4}$$

лучи G_is_i и G_js_j расположены симметрично относительно главных осей эллипса (4) и направлены по диагоналям прямоугольника, стороны которого касаются эллипса (4) в его вершинах $\pm{}^1/_2\sqrt{2}(G_i\pm G_j)$.

В $(n+1)$-мерном пространстве координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и времени t соотношение (3) определяет некоторую трубку (назовем ее ρ_ω-трубкой), каждое сечение которой гиперплоскостью $t=t^*$ представляет собой n-мерный эллипсоид с указанными выше свойствами. С течением времени может меняться произвольно ориентация главных осей этого эллипсоида, и сам он может деформироваться (т. е. могут меняться размеры его полуосей), но при этом строго определенные значения сохраняют расстояния от начала координат до точек пересечения с поверхностью эллипсоида всех лучей $\pm G_\sigma(t)s$, в частности, при $\omega(t)=\mathrm{const}$ эти расстояния остаются неизменными.

В свете изложенного выше, введенному понятию устойчивости на промежутке $[t_0, T)$ можно дать следующее геометрическое истолкование. Невозмущенный процесс устойчив на промежутке $[t_0, T)$, если существует такая ρ_ω-трубка, пределы которой при $t\in(t_0, T)$ не покидает ни одно из тех возмущений $x(t)$, которые в момент t_0 находились внутри и на поверхности этой трубки. Если же такой ρ_ω-трубки не существует, то процесс неустойчив.

Ниже приводятся некоторые условия устойчивости процесса на заданном промежутке $[t_0, T)$, представленного тривиальным решением ($x=0$) векторно-матричного уравнения

$$dx/dt=U(t)x+h(t,\ x), \tag{5}$$

где U — квадратная матрица порядка n, непрерывная на $[t_0, T)$, а h — столбцовая матрица, элементы которой — нелинейные функции отклонений x_j — таковы, что равномерно по t на $[t_0, T)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{h(t,x)}{\|x\|}=0;$$

в частности (в случае линейного процесса), $h(t, x)\equiv 0$.

2. Для установления условий устойчивости линейного процесса или же нелинейного процесса по линейному приближению весьма желательно знать характер изменения по t параметров пучка решений уравнения

$$dx/dt=U(t)x, \tag{6}$$

берущих начало внутри и на поверхности эллипсоида

$$(H_0^{-1}x,\ H_0^{-1}x)\leqslant\rho^2, \tag{7}$$

где $H_0=(h_{01}h_{02}\dots h_{0n})$ — произвольная невырожденная постоянная матрица порядка n, столбцы которой имеют одну и ту же норму, равную, например, α_0. Следующая теорема позволяет сделать некоторые полезные заключения о свойствах этого пучка.

Теорема 1. *Существует замена переменных*

$$x=K(t)y \quad (K=(K_1K_2\dots K_n),\ \det K\neq 0 \text{ на } [t_0, T)),$$

приводящая (6) *к уравнению*

$$dy/dt=\Lambda(t)y, \quad \Lambda=\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

где λ_j — непрерывные скалярные функции t, при условиях

$$K(t_0)=H_0, \quad \|K_j(t)\|=\alpha(t), \quad j=1, 2, \dots, n,$$

а $\alpha(t)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая положительная функция, удовлетворяющая требованию $\alpha(t_0)=\alpha_0$. При этом

$$K(t)=X(t)CZ(t), \tag{8}$$

где $X(t)$ — единственное решение матричного уравнения $dX/dt=UX$, $X(t_0)=E$ (E — единичная матрица); $C=(c_1c_2\dots c_n)$ — постоянная квадратная невырожденная матрица, столбцы которой определены равенствами

$$\frac{c_j}{\|c_j\|}=\frac{h_{0j}}{\alpha_0}e^{-i\theta_j(t)}, \quad j=1,2,\dots,n; \quad i^2=-1;$$

$$Z=\alpha(t)\,\mathrm{diag}\left(\frac{e^{i\theta_1(t)}}{\|Xc_1\|},\dots,\frac{e^{i\theta_n(t)}}{\|Xc_n\|}\right);$$

$$\mathrm{Re}\,\Lambda=\mathrm{diag}\left(\frac{d}{dt}\ln\frac{\|Xc_1\|}{\alpha},\dots,\frac{d}{dt}\ln\frac{\|Xc_n\|}{\alpha}\right);$$

$$\mathrm{Im}\,\Lambda=-\,\mathrm{diag}\left(\frac{d\theta_1}{dt},\dots,\frac{d\theta_n}{dt}\right);$$

$\theta_j(t)$ — произвольные непрерывно дифференцируемые вещественные скалярные функции.

Замечание. Если $T<\infty$, то $\det K(t)\neq 0$ при $\forall t\in[t_0, T]$.

Используя эту теорему, можно показать, что пучок решений уравнения (6), берущих начало внутри и на поверхности эллипсоида (7), представляется соотношением $(H^{-1}(t)x,\ H^{-1}(t)x)\leqslant\rho^2$, где $H=(h_1h_2\dots h_n)$ — квадратная матрица, столбцы которой имеют нормы, определенные равенствами

$$\|h_j(t)\|^2=\frac{1}{n}\sum_{\sigma=1}^{n}e^{2\mu_\sigma(t)(t-t_0)}\alpha^2(t), \quad j=1,2,\dots,n, \tag{9}$$

$$\mu_\sigma(t)=\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}\mathrm{Re}\,\lambda_\sigma(t)\,dt.$$

В силу (8) справедлива

Теорема 2. *Если*

$$\frac{1}{n}\sum_{\sigma=1}^{n}e^{2\mu_\sigma(t)(t-t_0)}\alpha^2(t)\leqslant\omega^2(t), \quad t\in[t_0, T),$$

то невозмущенный линейный процесс (решение уравнения (6)*) устойчив на промежутке $[t_0, T)$.*

С помощью равенства (8) могут быть сформулированы и другие, более простые достаточные условия устойчивости линейного процесса.

Так, при выполнении соотношения $\alpha(t)\leqslant\omega(t)$ невозмущенный линейный процесс (решение уравнения (6)) устойчив, если на $[t_0, T)$

$$\mu(t)=\max_\sigma \mu_\sigma(t)\leqslant 0$$

или, тем более,

$$\mu_0(t)=\max_\sigma \operatorname{Re}\lambda_\sigma(t)\leqslant 0.$$

Условия асимптотической устойчивости определяются следующей теоремой.

Теорема 3. *Пусть на промежутке* $[t_0, \infty)$ $\alpha(t)\leqslant\omega(t)$ *и* $\mu(t)\leqslant -b$, *где* b — *положительная постоянная.*

Тогда невозмущенный процесс (решение уравнения (6)) *асимптотически устойчив на* $[t_0, \infty)$.

Теорема 4 (об устойчивости на конечном промежутке по линейному приближению). *Пусть на промежутке* $[t_0, T<\infty)$ $\alpha(t)\leqslant\omega(t)$ *и* $\mu(t)\leqslant -b$, *где* b — *положительная постоянная.*

Тогда невозмущенный процесс (тривиальное решение уравнения (5)) *устойчив на промежутке* $[t_0, T)$.

3. Условия устойчивости, приведенные выше, основаны на теореме о диагонализации линейной системы. Однако, чтобы воспользоваться представлением (8), нужно располагать фундаментальной матрицей X линейной системы. В некоторых случаях (например, в случае линейной стационарной системы) определение X, а значит, и матрицы преобразования линейной системы к диагональному виду, не представляет труда. Но все же случаи, когда могут быть найдены точные выражения для X в конечном виде, исключительны. В то же время известно немало способов построения матрицы преобразования линейной дифференциальной системы к системе, «близкой» к диагональной. В связи с этим для практического применения больший интерес представляют условия устойчивости, полученные с использованием преобразований такого рода.

Допустим, что $K=(K_1K_2\ldots K_n)$ — невырожденная и дифференцируемая на $[t_0, T]$ матрица, столбцы которой имеют одинаковую норму, а именно,

$$\|K_j(t)\|=\alpha(t)>0, \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

и

$$dK/dt=UK-K\Lambda+N, \tag{10}$$

где $\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, а N — некоторая квадратная матрица порядка n. Далее, пусть по-прежнему $\mu_0(t)=\max_\sigma \operatorname{Re}\lambda_\sigma(t)$, а $\nu_{\max}(t)$ — максимальное собственное значение эрмитовой матрицы $P=-{}^1/_2(MN+N^*M^*)$ $(M=K^{-1})$. Тогда, проведя в (5) замену переменных $x=Ky$ с использованием соотношения (10), можно установить следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть на промежутке* $[t_0, T)$ $\alpha(t)\leqslant\omega(t)$ *и*

$$\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}[\mu_0(t')+\nu_{\max}(t')]\,dt'\leqslant -b,$$

где b — *положительная постоянная.*

Тогда невозмущенный процесс (тривиальное решение уравнения (5)) *устойчив на промежутке* $[t_0, T)$.

Московский авиационный институт
им. С. Орджоникидзе

Поступило
28 II 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Г. Четаев, Сборн. научн. тр. Казанского авиацион. инст., № 3 (1935). [2] Н. Д. Моисеев, Зап. семинара по теории устойчивости движения, Воен.-возд. акад. им. Н. Е. Жуковского, в. 1, 1946. [3] Г. В. Каменков, А. А. Лебедев, ПММ, 18, в. 4 (1954). [4] К. А. Абгарян, ПММ, 32, в. 6 (1968).