

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ, И. Ф. КУШНИРЧУК

О ПОЛНОТЕ В АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ СИСТЕМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В данной заметке исследуется вопрос о полноте в некоторых специальных областях системы бесселевых функций $\{J_{\nu_n}(z)\}$, где $\{\nu_n\}$ — произвольная последовательность, вообще говоря, комплексных чисел.

Известно, что функция $J_\nu(z)$ при любом ν (действительном или комплексном) является решением уравнения Бесселя с индексом ν (см. (1)):

$$(B - \nu^2 I) \varphi(z) = z^2 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + z \frac{d\varphi}{dz} + (z^2 - \nu^2) \varphi(z) = 0, \quad (1)$$

где I — единичный оператор, $B = z^2 \frac{d^2}{dz^2} + z \frac{d}{dz} + z^2 I$ — оператор Бесселя. Кроме того, функция $J_\nu(z)$ определена и регулярна в комплексной плоскости z с разрезом вдоль действительной отрицательной полуоси и может быть представлена с помощью ряда

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}. \quad (2)$$

Далее, известно (см. (1)), что последовательность $\{J_\nu(z)\}$ цилиндрических функций с целыми неотрицательными индексами ν образует базис (и следовательно, полна) в каждом пространстве A_R , $0 < R < +\infty$, однозначных аналитических в круге $|z| < R$ функций. Остается исследовать вопрос о полноте системы $\{J_{\nu_n}(z)\}$ в случае, когда $\{\nu_n\}$ — произвольная последовательность комплексных (или действительных) чисел.

Заметим, что с помощью замены независимой переменной z по формуле $z = \exp w$ уравнение (1) преобразуется в следующее уравнение:

$$(\tilde{B} - \nu^2 I) \psi(w) = d^2 \psi / dw^2 + (\exp(2w) - \nu^2) \psi(w) = 0,$$

где $\psi(w) = \varphi(\exp w)$, $\tilde{B} = d^2 / dw^2 + e^{2w}$ и I — единичный оператор.

Обозначим через D_R область в плоскости z , являющуюся образом круга $|w| < R \leq \pi$ при отображении $z = \exp w$, а через $A(D_R)$ — пространство аналитических в ней функций.

Пусть $T_1 f(z) = f(\exp w) = g(w)$, где $f(z)$ — любая функция пространства $A(D_R)$. Оператор $T_1: A(D_R) \rightarrow A_R$, взаимно однозначно и непрерывно отображающий пространство $A(D_R)$ на A_R , удовлетворяет равенству

$$T_1 B = \tilde{B} T_1, \quad (3)$$

и сохраняет начальные условия (в соответствующих точках $w=0$ и $z=1$): $D_w^k T_1 f(z)|_{w=0} = f^{(k)}(1)$, $k=0, 1$, для каждой функции $f(z)$ из пространства $A(D_R)$. Так как коэффициенты оператора $\tilde{B}$ являются целыми функциями, то этот оператор линейно эквивалентен (см. (4, 5)) оператору D_w^2 двукратного дифференцирования в каждом пространстве A_R , $0 < R \leq \infty$. В частности, и при $0 < R \leq \pi$ существует изоморфизм $T_2: A_R \leftrightarrow A_R$ пространства A_R , удовлетворяющий равенству

$$T_2 \tilde{B} = D_w^2 T_2, \quad (4)$$

при этом оператор T_2 также сохраняет начальные условия

$T_2 g(w)|_{w=0} = g(0)$, $(T_2 g(w))'_w|_{w=0} = g'(0)$ для любой функции $g \in A_R$.

Лемма. Существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение T_0 пространства $A(D_R)$ на пространство A_R , удовлетворяющее равенству: $T_0 B = D_w^{-2} T_0$ и сохраняющее начальные условия $T_0 f(z)|_{w=0} = f(1)$ $(T_0 f(z))'_w|_{w=0} = f'(1)$ для любой функции $f \in A(D_R)$.

Для доказательства леммы достаточно положить $T_0 = T_2 T_1$. Действительно, из равенств (3) и (4) получаем $T_2 T_1 B = T_2 \tilde{B} T_1 = D_w^{-2} T_2 T_1$. Кроме этого, $T_0 f(z)|_{w=0} = T_2(T_1 f(z))|_{w=0} = T_2 g(w)|_{w=0} = g(0) = f(1)$, а также $(T_0 f(z))'_w|_{w=0} = (T_2 g(w))'_w|_{w=0} = g'(0) = f'(1)$.

С помощью отображения T_0 собственные функции $J_\nu(z)$ оператора B , которые соответствуют собственным значениям ν^2 , преобразуются в собственные функции $\exp(\nu w)$ оператора D_w^{-2} , принадлежащие тем же собственным значениям. Рассмотрим последовательность комплексных чисел $\{\nu_n\}$ и функцию $h(w) = \exp w$, принадлежащую классу целых функций $[-1, 1]$. Заметим, что $\max_{|w|=r} |\exp w| = \exp r$.

В дальнейшем нам понадобится следующая теорема И. И. Ибрагимова (⁽⁶⁾; см. также (⁽⁵⁾), стр. 421): Пусть $M(F; r)$ есть максимум модуля целой

функции $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k$, $C_k \neq 0$ в круге $|z| \leq r$. Система функций $\{F(\alpha_k z)\}$

полна в круге $|z| < R$, если имеет место неравенство

$$\ln M(F; Rr/\theta) < C(\theta) n(r), \quad C(\theta) < \ln(1/\theta), \quad 0 < \theta < 1,$$

где $n(r)$ — функция плотности последовательности $\{\alpha_k\}$.

Применим эту теорему к системе функций $\{h(\nu_n w) = \exp(\nu_n w)\}$. Так как свойства полноты системы функций сохраняются при изоморфизмах пространств, то на основании этого получается следующая

Теорема 1. Пусть $n(r)$ есть функция плотности последовательности комплексных чисел $\{\nu_n\}$.

Тогда система функций Бесселя $\{J_{\nu_n}(z)\}$ полна в пространстве $A(D_R)$ при $R < \min\left(\pi, \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{er}\right)$.

Из этого утверждения вытекают следствия 1, 2.

Следствие 1. Пусть $\{\nu_n\}$ — последовательность различных комплексных чисел и

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln |\nu_n|}, \quad \nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\nu_n|}.$$

Тогда система функций Бесселя $\{J_{\nu_n}(z)\}$ полна в пространстве $A(D_R)$: а) при $R \leq \pi$ для $\mu > 1$, б) при $R \leq \min(\pi, \nu/2)$ для $\mu = 1$. Если $\mu < 1$, то система функций $\{J_{\nu_n}(z)\}$ не является полной ни в одном из пространств $A(D_R)$, где $R \leq \pi$.

В самом деле, полагая $r = n^{1/\mu}$ и учитывая, что $\max_{0 < \theta < 1} \left[\theta \ln \left(\frac{1}{\theta} \right) \right] = 1/e$,

находим $R n^{1/\mu} < n/e$. Это неравенство, очевидно, удовлетворяется при любом конечном R , если $\mu > 1$, и не удовлетворяется, если $\mu < 1$, т. е. $R \leq \pi$ в первом случае и $R = 0$ во втором. Далее, имея в виду, что $|\nu_n| \geq (n/\nu)^{1/\rho}$ и полагая $r = n/\nu$, находим $R < \min(R, \nu/e)$.

Следствие 2. Пусть $\{\nu_n\}$ — последовательность комплексных чисел, расположенных в угле раствора 2α , $0 \leq \alpha \leq 1/2\pi$, с вершиной в начале координат, и $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} (n/|\nu_n|)$.

Тогда система функций $\{J_{\nu_n}(z)\}$ полна в каждом пространстве $A(D_R)$ с $R < \pi \min\{1, \beta \cos \alpha\}$.

Если воспользоваться теоремой 20 из (7) о полноте системы $\{\exp(\nu_n w)\}$ в горизонтальных полосах, то получится

Теорема 2. Пусть $\{\nu_n\}$ — последовательность точек правой полуплоскости $\xi, \lambda(r)$ — число этих точек в круге $|\xi - 1/2r| < 1/2r$ и $d = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\lambda(r)}{r}$.

Тогда система функций $\{J_{\nu_n}(z)\}$ полна в каждом пространстве $A(D_R)$ с $R < \pi \min(1, d)$.

З а м е ч а н и е. Область D_R плоскости $z, z = x + iy$, ограничена кривой $z = e^u (\cos v + i \sin v)$, $|w|^2 = u^2 + v^2 = R^2$, симметричной относительно оси абсцисс, и пересекает ее в точках e^{-R} и e^R , $R \leq \pi$. Можно проверить, что круг $K_R = \{z: |z - \operatorname{ch} R| < \operatorname{sh} R\}$, $0 < R \leq \pi$, содержится в области D_R . На основании этого из предыдущих утверждений получаются условия полноты системы $\{J_{\nu_n}(z)\}$ в круговых областях.

С л е д с т в и е 3. Пусть $\{\nu_n\}$, μ и ν — такие же, как и в следствии 1.

Тогда система функций $\{J_{\nu_n}(z)\}$ полна в пространстве $A(K_R)$ функций, аналитических в круге K_R при: а) $\mu > 1$ для любого $R \leq \pi$, и б) $\mu = 1$ для любого $R < \min\{\pi, \nu/e\}$.

С л е д с т в и е 4. При выполнении условий теоремы 2 система функций $\{J_{\nu_n}(z)\}$ полна в каждом пространстве $A(K_R)$ с $R < \pi \min\{1, \beta \cos \alpha\}$.

С л е д с т в и е 5. Если выполняются условия теоремы 2, то система функций $\{J_{\nu_n}(z)\}$ полна в пространстве $A(K_R)$ при любом $R < \pi \min\{1, d\}$.

Рассмотрим теперь тот частный случай, когда индекс цилиндрической функции $J_{\nu}(z)$ равен половине нечетного числа: $\nu = (2m+1)/2$, $m = 0, 1, \dots$, а соответствующие функции выражаются (см. (1)) в конечном виде через алгебраические и тригонометрические функции формулами

$$J_{(2m+1)/2}(z) = (-1)^m \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} z^{(2m+1)/2} \frac{d^m}{(z dz)^m} \left(\frac{\sin z}{z}\right)$$

$$J_{(2m+1)/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} z^{(2m+1)/2} \frac{d^m}{(z dz)^m} \left(\frac{\cos z}{z}\right)$$

В этом случае $\mu = \nu = \beta = 1$; $\alpha = 0$. Поэтому из теоремы 2 и следствия 2 получается

С л е д с т в и е 4'. Системы функций $\{J_{\pm(2m+1)/2}(z)\}$ полны в каждом из пространств $A(D_R)$ и $A(K_R)$ при любом $R < \pi$.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
4 VII 1973

Черновицкий государственный
университет

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций. 1, М., 1949. ² Н. И. Нагнибид, Матем. заметки, 77, № 3, 299 (1970). ³ М. К. Фагее, В сборн. Исследования по соврем. проб. ТФКП, М., 1961, стр. 468. ⁴ К. М. Фишман, УМН, 19, № 5, 143 (1964). ⁵ И. И. Ибрагимов, Методы интерполяции функций и некоторые их применения, «Наука», 1971, стр. 1. ⁶ И. И. Ибрагимов, Изв. АН СССР, сер. матем., 13, 45 (1949). ⁷ Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, «Наука», 1956, стр. 1.