

УДК 539.12

МАТЕМАТИКА

А. А. БОГУШ, академик АН БССР Ф. И. ФЕДОРОВ, А. М. ФЕДОРОВЫХ
**О КОНЕЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ГРУППЫ $SO(n, R)$
И ЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ**

Будем называть антисимметричную вещественную матрицу $A = A^* = -\tilde{A}$ простой (кратно простой), если она удовлетворяет соотношению

$$A(A^2 - \lambda^2) = 0, \quad \lambda \neq 0. \quad (1)$$

Подчеркнем, что это соотношение не обязательно является минимальным уравнением матрицы A . Условию (1) удовлетворяет любая матрица $A = A^* = -\tilde{A}$, имеющая единственную пару отличных от нуля собственных значений $\pm \lambda$, простых или кратных. Если $\pm \lambda$ — простые собственные значения, то $\lambda^2 = \text{Sp}(A^2)/2$ и матрица A является простой ⁽¹⁾.

В общем случае из (1) следует

$$\text{Sp}(A^2) = 2p\lambda^2, \quad p = [\text{Sp}(A^2)]/2 \text{Sp}(A^*), \quad (2)$$

где p — кратность собственных значений $\pm \lambda$. При этом матрица A (1) будет p -кратно простой. Для матриц $A = A^* = -\tilde{A}$ четного порядка возможно минимальное уравнение вида $A^2 = \lambda^2$, но в этом случае уравнение (1) также справедливо.

Значение простых (кратно простых) матриц A обусловлено тем, что ортогональное преобразование $O(A)$ группы $SO(n, R)$, для которого A (1) является матрицей параметров, имеет при любом n универсальную простую форму ⁽¹⁾.

$$O = O^{-1} = O(A) = \frac{1+A}{1-A} = 1 + 2 \frac{A+A^2}{1-\lambda^2}, \quad A = \frac{O-\tilde{O}}{2+O+\tilde{O}} = -\tilde{A}. \quad (3)$$

В соответствии со свойством (1) матрицы A будем называть определяемое ею ортогональное преобразование $O(A)$ простым (кратно простым). Покажем, что любое преобразование $O \in SO(n, R)$ может быть представлено в виде произведения коммутирующих между собойкратно простых преобразований.

Всякая $(n \times n)$ -матрица $A = A^* = -\tilde{A}$ удовлетворяет уравнению

$$(A^2)^r (A^2 - \lambda_1^2) (A^2 - \lambda_2^2) \dots (A^2 - \lambda_j^2) \dots (A^2 - \lambda_m^2) = 0, \quad m \leq \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где $r=0$, если у матрицы A нет нулевых собственных значений ($r=1$ в ином случае), λ_j^2 — все различные собственные значения матрицы A^2 , $j=1-r, \dots, m$; $\lambda_0=0$. Следуя ⁽²⁾, введем проективные операторы

$$\pi_j = \prod_{\substack{i=1-r \\ (i \neq j)}}^m (A^2 - \lambda_i^2) / (\lambda_j^2 - \lambda_i^2), \quad i, j=1-r, \dots, m; \quad (5)$$

$$\pi_j^2 = \pi_j = \pi_j, \quad \pi_i \pi_j = \pi_j \pi_i = 0, \quad i \neq j, \quad \sum_{j=1-r}^m \pi_j = 1, \quad A^2 \pi_j = \lambda_j^2 \pi_j, \quad (6)$$

и с их помощью определим матрицы A_j :

$$A_j = \pi_j A = A \pi_j = -\tilde{A}_j, \quad A_0 = 0, \quad A_j \pi_j = \pi_j A_j = A_j, \quad (7)$$

$$A_i A = A A_j = A_j^2, \quad A_i A_j = 0, \quad i \neq j, \quad A = \sum_{j=1}^m A_j, \quad A_j^3 = \lambda_j^2 A_j. \quad (7)$$

Таким образом, всякая матрица $A = A^* = -\tilde{A}$ может быть представлена в виде суммы взаимно ортогональных (в смысле $A_i A_j = 0$)кратно простых матриц. Из (6), (7), (3) следует

$$O(A) = (1+A)/(1-A) = \prod_{j=1}^m (1+A_j)/(1-A_j) = \prod_{j=1}^m O_j, \quad (8)$$

$$O_j = O(A_j) = 1 + 2(A_j + A_j^2)/(1 - \lambda_j^2), \quad O_j O_k = O_k O_j.$$

Согласно общему определению представления $T(A)$ группы $SO(n, R)$, из соответствия $O(A) \rightarrow T(A)$, $O(A') \rightarrow T(A')$ следует $O(A)O(A') \rightarrow T(A)T(A')$ для любых A, A' . Поэтому (см. (8)) каждое преобразование $T(A)$ можно написать в форме

$$T(A) = \prod_{j=1}^m T_j, \quad T_j = T(A_j), \quad T_j T_k = T_k T_j, \quad m \leq \left[\frac{n}{2} \right]. \quad (9)$$

Термин «кратно простое» естественно распространяется и на преобразование представления $T_j = T(A_j)$. Таким образом, результат (9) формулируется в виде утверждения: *любое преобразование представления группы $SO(n, R)$ выражается в виде произведения $m \leq \left[\frac{n}{2} \right]$ взаимно коммутирующих кратно простых преобразований.*

Напомним, что для простых вещественных антисимметричных матриц $p=1$ (см. (1), (2)) и справедливы соотношения $(1, 3)$ $A_{[ij} A_{kl]} = A_{[ij} A_{kl]} = 0$. Такие A всегда можно представить в виде

$$A = \frac{b \cdot a - a \cdot b}{a^2 + ab}, \quad (a \cdot b)_{ij} = a_i b_j, \quad a^2 = b^2 = a_i a_i, \quad (10)$$

$$a, b \in V(n, R), \quad i, j, k, l = 1, 2, \dots, n.$$

Соответствующие ортогональные матрицы $O(A)$ (3) имеют вид (1)

$$O = O(A) = O[b, a] = 1 - [(a+b) \cdot (a+b)] / (a^2 + ab) + 2(a \cdot b) / a^2, \quad (11)$$

$$O[b, a]a = b, \quad A = (O - \bar{O}) / (4 - n + \text{Sp } O).$$

Всякую p -кратно простую матрицу A (1), (2) можно представить в виде суммы p простых матриц

$$A = \sum_{i=1}^p B_i, \quad B_i = \frac{b_i \cdot a_i - a_i \cdot b_i}{a_i^2}, \quad (12)$$

с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$a_i = C_i c_i, \quad b_i = C_i^2 c_i, \quad C_i = C_{i-1} - B_{i-1} = A - \sum_{j=1}^{i-1} B_j, \quad (13)$$

$$C_i = A, \quad C_i^3 = \lambda^2 C_i = [\text{Sp } (C_i^2) C_i] / 2(p - i + 1), \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

где c_i , $i = 1, 2, \dots, p$, — произвольные n -мерные векторы, для которых $C_i c_i \neq 0$. При этом по построению

$$A^2 a_i = \lambda^2 a_i, \quad A^2 b_i = \lambda^2 b_i, \quad a_i b_i = 0, \quad C_i a_k = 0, \quad C_i b_k = 0, \quad k \leq i-1, \quad (14)$$

$$B_i B_j = 0, \quad i \neq j, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, p.$$

Благодаря соотношению (12) из разложений (8) и (9) матриц $O(A)$ и операторов $T(A)$ на кратно простые сразу получается разложение всякого конечного преобразования $O(A)$ группы $SO(n, R)$ и произвольного ее представления $T(A)$ на взаимно коммутирующие простые преобразования. Эти результаты дают конкретную реализацию известных положений о том, что всякая антисимметричная $(n \times n)$ -матрица (бивектор) может быть разложена на простые ⁽³⁾, а всякое преобразование $O \in SO(n, R)$ представляет собой произведение некоторого числа $\leq n/2$ простых вращений, двумерные плоскости которых взаимно ортогональны ⁽⁴⁾.

Используя известную методику (см., например, ^(5, 6)), легко показать, что простому (кратно простому) преобразованию $O=O(A)$ будет соответствовать оператор представления

$$T=T(A)=\exp \{(2\hat{A} \operatorname{arctg} i\lambda)/i\lambda\}, \quad (15)$$

где

$$A=1/2 A_{ij} I^{ij} \rightarrow 1/2 \hat{A}_{ij} I^{ij}=\hat{A}, \quad (16)$$

I^{ij} и J^{ij} , $i, j=1, 2, \dots, n$, — инфинитезимальные операторы группы $SO(n, R)$ и рассматриваемого ее представления, которые мы в дальнейшем будем считать известными ⁽⁵⁾.

Учтем теперь, что для каждой простой (но не кратно простой) матрицы параметров A (10) всегда существует преобразование $O=O(A_1)$, принадлежащее группе $SO(n, R)$, которое преобразует базис пространства $V(n, R)$ таким образом, что

$$O(A_1)AO^{-1}(A_1)=A'=i\lambda J^{ij}. \quad (17)$$

Аналогично в пространстве представлений будем иметь

$$T(A_1)\hat{A}T^{-1}(A_1)=\hat{A}'=i\lambda J^{ij}. \quad (18)$$

Отсюда следует, что операторы $\hat{A}$ и $i\lambda J^{ij}$ будут удовлетворять одному и тому же минимальному уравнению. Используя известные соотношения ⁽⁵⁾, получим это уравнение в виде

$$O^{(n_1)}(\hat{A})=\hat{A}^s[\hat{A}^2-\lambda^2 n_1^2][\hat{A}^2-\lambda^2(n_1-1)^2] \dots [\hat{A}^2-\lambda^2((1+s)/2)^2]=0, \quad (19)$$

где $s=1$ ($s=0$) при n_1 целом (полуцелом). Здесь учтено, что инфинитезимальный оператор представления (например, J^{21}) группы $SO(n, R)$, определяемого числами

$$\begin{aligned} n_1, n_2, \dots, n_k+1, & \quad n=2k+2, \\ n_1, n_2, \dots, n_k, & \quad n=2k+1, \end{aligned}$$

имеет следующий набор собственных значений ⁽⁵⁾:

$$m_{11}=-n_1, -(n_1-1), \dots, n_1-1, n_1.$$

Обратимся теперь к выражениям для операторов конечных преобразований приводимого представления группы $SO(3, R)$ ⁽⁶⁾, полученным на основе векторной параметризации ⁽⁷⁾. Легко видеть, что приведенные выше соотношения (15) и (19) получаются из соответствующих соотношений для группы $SO(3, R)$ ⁽⁶⁾

$$T(c)=\exp \{(\hat{c} \operatorname{arctg} |c|)/(|c|)\}, \quad (20)$$

$$Q^{(1)}(\hat{c})=\hat{c}^3[\hat{c}^2+\hat{c}^2 l^2][\hat{c}^2+\hat{c}^2(l-1)^2] \dots [\hat{c}^2+\hat{c}^2((1+s)/2)^2]=0 \quad (21)$$

в результате замены

$$\hat{c}^2 \rightleftharpoons -\lambda^2 = -1/2 \operatorname{Sp}(A^2), \quad \hat{c} \rightleftharpoons \hat{A}, \quad l \rightleftharpoons n_1; \quad (22)$$

здесь $\hat{c}=c_a J^a$, $a=1, 2, 3$; c — трехмерный вектор-параметр группы $SO(3, R)$, J^a — инфинитезимальные операторы приводимого представления этой груп-

пы, составленного из ее неприводимых представлений только с целыми (либо только с полуцелыми) весами, наибольший из которых определяется числом $l=n_1$ ⁽⁶⁾.

Поэтому по аналогии с формулой

$$T_l(c) = P_l(\hat{c}) / (1+c^2)^l, \quad (23)$$

полученной в ⁽⁶⁾ для группы $SO(n, R)$, можно сразу написать следующее выражение для оператора $T(A)$ (15) произвольного неприводимого представления группы $SO(n, R)$, отвечающего простому вращению $O=O(A)$:

$$T_{n_1}(A) = P_{n_1}(\hat{A}) / (1-\lambda^2)^{n_1}, \quad (24)$$

где $P_{n_1}(\hat{A})$ — полином степени $2n_1$ относительно оператора $\hat{A}$, коэффициенты которого с учетом замены (22) могут быть взяты из ⁽⁶⁾.

Применяя описанный подход к построению операторов преобразований представления группы $SO(6, R)$ в четырехмерном спинорном пространстве ($n_1=1/2$), найдем

$$T(A) = \prod_{a=1}^3 T(A_a) = \pm \prod_{a=1}^3 \{ (1+2\hat{A}_a) / (1-\lambda_a^2)^{1/2} \} = w + WS = U(A), \quad U^+ = U^{-1}, \quad (25)$$

откуда следует

$$A = -\tilde{A} = \text{Im } W / \text{Re } w; \quad (26)$$

здесь использованы обозначения

$$w = \pm [1 + \frac{1}{6} i \text{Sp}(AM)] / (|1-A|^{1/2}), \quad W = \pm (iA - M) / (|1-A|^{1/2}),$$

$$M_{ij} = \frac{1}{8} \varepsilon_{ijklmn} A_{kl} A_{mn}, \quad |1-A| = \prod_{a=1}^3 (1-\lambda_a^2), \quad (27)$$

$$WS = W_{ij} S_{ij}, \quad i, j, k, l, m, n = 1, 2, \dots, 6,$$

где $S_{ij} = -iJ^{ij}$ — известные (см., например, ⁽⁸⁾) элементы базиса алгебры

Дирака $\left(S_{\mu\nu} = \frac{1}{4i} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu), \right.$

$$\left. S_{6\mu} = \frac{1}{2} \gamma_\mu, \quad S_{65} = \frac{1}{2} \gamma_5, \quad S_{5\mu} = \frac{1}{2i} \gamma_5 \gamma_\mu; \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4 \right).$$

Соотношения (25), (27) дают общие выражения для конечных преобразований группы $SU(4)$, играющей роль универсальной накрывающей группы для $SO(6, R)$, через (6×6) -матрицы параметров $A = A^* = -\tilde{A}$.

Заметим, что использование простых (кратно простых) преобразований в теории высших ортогональных групп в известной мере аналогично использованию эффективной векторной параметризации в теории групп $SO(3)$, $SO(4)$, $\tilde{SO}(3,1)$, $SO(4, C)$ ^(7, 9-11).

Поступило
4 X 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. А. Богущ, Ф. И. Федоров, ДАН, 206, 1033 (1972). ² Ф. И. Федоров, ЖЭТФ, 35, 493 (1958). ³ Я. Л. Схоутен, Тензорный анализ для физиков, «Наука», 1965. ⁴ Э. Картан, Теория спиноров, М., 1947. ⁵ И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро, Представления группы вращений и группы Лоренца, М., 1958. ⁶ Ф. И. Федоров, Е. Е. Тхарев, Вестн. АН БССР, сер. физ. матем. наук, 1, 101 (1967). ⁷ Ф. И. Федоров, Докл. АН БССР, 2, 408 (1958). ⁸ Ю. П. Степановский, Укр. физ. журнал, 11, 813 (1966). ⁹ Ф. И. Федоров, ДАН, 143, 56 (1962). ¹⁰ А. А. Богущ, Ф. И. Федоров, Теоретич. и матем. физ., 13, 67 (1972). ¹¹ Ф. И. Федоров, ДАН, 209, 70 (1973).