Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 5

УДК 519.24 *МАТЕМАТИКА*

И. Г. ЖУРБЕНКО

ОБ ОЦЕНКЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 26 X 1973)

Вопрос оценки спектральной плотности стационарного процесса по его выборочным значениям актуален при различных приложениях теории стационарных процессов и широко обсуждается в многочисленной литературе. Математической стороне этого вопроса посвящены работы [1–6]. Подробный разбор случая гауссовского стационарного процесса содержится в работах [2, 3]. Общая постановка задачи рассматривается в работе [5]. Асимптотические формулы оценок спектральной плотности и их моментов получены в [1, 4]. Во многих приложениях интересно знать асимптотическое поведение оценки спектра, когда «ширина спектрального окна» стремится к нулю при $T\to\infty$ (T — длительность наблюдения).

В данной статье изучается асимптотическое поведение первых двух моментов оценки спектральной плотности при весовой функции $\varphi_T(k)$, зависящей от T. Асимптотические результаты даются в зависимости от некоторых числовых характеристик функции $\varphi_T(k)$ в предположении сформулированных ниже свойств гладкости спектральной плотности $f(\lambda)$ процесса $x(t)$ и ограниченности его четвертой спектральной плотности.

В работах [7, 8] приводятся оценки сверху старших спектральных плотностей процессов, удовлетворяющих некоторым условиям перемешивания, а также доказываются некоторые свойства гладкости старших спектральных плотностей; в работе [7] такие оценки устанавливаются при степенном характере убывания зависимостей по Розенблатту; в работе [8] за счет использования условий перемешивания почти марковского типа получены более сильные оценки старших спектральных плотностей, из этих оценок, в частности, вытекает разложимость характеристического функционала в ряд по старшим спектральным плотностям.

Будем рассматривать стационарный процесс $x(t)$ с дискретным параметром t и считать $Mx(t)=0$. Характеристический функционал

$$H(a)=Me^{i(a,x)},\quad (a,x)=\sum_t a(t)x(t),$$

определим на множестве функций $a(t)$, отличных от нуля в конечном числе точек t. Смешанные моменты $M_n(t_1\ldots t_n)$ и семиинварианты $S_n(t_1\ldots t_n)$ определяются как коэффициенты формальных разложений

$$H(a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\sum_{t_1\ldots t_n}M_n(t_1\ldots t_n)a(t_1)\ldots a(t_n),$$

$$\ln H(a)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\sum_{t_1\ldots t_n}S_n(t_1\ldots t_n)a(t_1)\ldots a(t_n),$$

где $M_n(t_1\dots t_n)$ и $S_n(t_1\dots t_n)$ предполагаются симметричными функциями аргументов $t_1\dots t_n$, суммирование производится по всем последовательностям целых чисел $t_1\dots t_n$. В некоторых работах (см. ([9])) для смешанных семиинвариантов $S_n(t_1\dots t_n)$ и моментов $M_n(t_1\dots t_n)$ используются обозначения S_ν и M_ν, где функция $\nu(t)$ равна числу появлений t в последовательности $t_1\dots t_n$. В этих обозначениях между смешанными моментами и семиинвариантами справедливо соотношение

$$\frac{S_\nu}{\nu!}=\sum_{\nu_1+\dots+\nu_k=\nu}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\prod_{j=1}^{k}\frac{M_{\nu_j}}{\nu_j!},\tag{1}$$

где $\nu!=\prod\limits_t \nu(t)!$, $0!=1$, сумма берется по всем последовательностям $\nu_1\dots\nu_k$, таким, что $\nu_1(t)+\dots+\nu_k(t)=\nu(t)$.

Спектральные меры F_n на кубах Π^n, определяемых неравенствами $-\pi\leqslant\lambda_i\leqslant\pi$, задаются своими коэффициентами Фурье

$$S_n(t_1\dots t_n)=\int\limits_{\Pi^n}\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}t_k\lambda_k\right\}F_n(d\bar\lambda).\tag{2}$$

В случае стационарного процесса $x(t)$ семиинварианты $S_n(t_1\dots t_n)$ инвариантны по сдвигам $S_n(t_1+\tau\dots t_n+\tau)=S_n(t_1\dots t_n)$, а спектральные меры F_n сосредоточены на многообразиях $\lambda_1+\dots+\lambda_n=0\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$ и их естественно записать в виде

$$F_n(M)=\int\limits_M f_n(\lambda_1\dots\lambda_n)\,\delta^*(\lambda_1+\dots+\lambda_n)\,d\lambda_1\dots d\lambda_n,$$

где $M\subset\Pi^n$ и $\delta^*(x)=\sum\limits_{t=-\infty}^{\infty}\delta(x-2\pi t)$, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Функцию $f_n(\lambda_1\dots\lambda_n)$, если она существует, называют спектральной плотностью n-го порядка. Заметим, что $f_2(\lambda,-\lambda)$ как функция одного переменного является спектральной плотностью стационарного процесса. В настоящей работе речь пойдет об оценке $f_T(\lambda)$ спектральной плотности $f(\lambda)$, построенной по T наблюдениям $x(1),\dots,x(T)$ стационарного процесса $x(t)$.

В качестве оценки спектральной плотности $f(\lambda)$ будем употреблять выражение

$$f_T(\lambda_k)=\sum_{k_1}\varphi_T(k_1)\,I_T(\lambda_{k+k_1}),$$

где $\lambda_k=2\pi k/T$, суммирование здесь и везде далее, если это не оговорено отдельно, производится по всем целым k, $-{}^1\!/_2T<k\leqslant{}^1\!/_2T$, $\varphi_T(k)$ — некоторая функция, определенная для целых k, такая, что $0\leqslant\varphi_T(k)=\varphi_T(-k)$, $\varphi_T(k+T)=\varphi_T(k)$, $\sum\limits_k\varphi_T(k)=1$.

Периодограммы $I_T(\lambda)$ определяются следующим образом:

$$I_T(\lambda)=\frac{1}{2\pi T}\sum_{s_1=1}^{T}e^{is_1\lambda}x(s_1)\sum_{s_2=1}^{T}e^{-is_2\lambda}x(s_2).$$

Для функции $\varphi_T(k)$ как для распределения на множестве целых чисел введем понятие дисперсии $D\varphi_T=\sum\limits_k\varphi_T(k)\cdot k^2$, которая в данном случае совпадает со вторым моментом ввиду симметрии функции $\varphi_T(k)$. В таком случае справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть процесс $x(t)$ имеет два первых момента, а его спектральная плотность $f(\lambda)$ дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, причем*

$$R(\lambda, \Delta) = |f(\lambda+\Delta) - f(\lambda) - f'(\lambda)\Delta| \leqslant C\Delta^2. \tag{3}$$

В таком случае выполняется неравенство

$$|M\hat{f}_T(\lambda_k) - f(\lambda_k)| \leqslant C\pi^2(T^{-1} + 4D\varphi_T T^{-2}). \tag{4}$$

Следующая теорема устанавливает зависимость дисперсии оценки спектральной плотности $\hat{f}_T(\lambda)$ от спектральной плотности $f(\lambda)$ и параметров функции $\varphi_T(k)$.

Теорема 2. *Пусть процесс $x(t)$ имеет все смешанные моменты до четвертого порядка. Пусть спектральная плотность $f(\lambda)$ процесса $x(t)$ дифференцируема, причем $\sup\limits_{\lambda}|f(\lambda)| \leqslant C_1 < \infty$, $\sup\limits_{\lambda}|f'(\lambda)| \leqslant C_2 < \infty$. Пусть существует и интегрируема спектральная плотность четвертого порядка процесса $x(t)$ такая, что $\sup\limits_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} |f_4(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)| \leqslant C_3 < \infty$. В таком случае существует дисперсия оценки $\hat{f}_T(\lambda)$ спектральной плотности $f(\lambda)$ и для нее выполняется*

$$\left| D\hat{f}_T(\lambda_m) - f^2(\lambda_m) \sum_k \varphi_T^2(k) - \sum_k f^2(\lambda_k)\varphi_T(k+m)\varphi_T(k-m) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4\pi^2 C_2^2}{T^2} \sum_k \varphi_T^2(k)\cdot k^2 + \frac{8C_1C_2 \ln T + C_3C_4}{T}, \tag{5}$$

где абсолютная константа C_4 определяется ниже.

Доказательство. Воспользовавшись определением $\hat{f}_T(\lambda_m)$, подставим вместо $I_T(\lambda_k)$ их выражения через выборочные функции процесса $x(t)$, после чего, применяя равенство (1), получим

$$Df_T(\lambda_m) = \frac{1}{4\pi T^2} \sum_{m_1 m_2} \varphi(m_1)\varphi(m_2) \sum_{t_1 \ldots t_4 = 1}^{T} (S_4(t_1 \ldots t_4) + S_2(t_1 t_2) S_2(t_2 t_4) +$$

$$+ S_2(t_1 t_4) S_2(t_2 t_3)) \exp\{-it_1\lambda_{m+m_1} + it_2\lambda_{m+m_1} - it_3\lambda_{m+m_2} + it_4\lambda_{m+m_2}\},$$

что в силу (2) приводится к виду

$$D\hat{f}(\lambda_m) = \frac{1}{4\pi^2 T^2} \sum_{m_1 m_2} \varphi_T(m_1)\varphi_T(m_2) \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{-\pi \leqslant x_i \leqslant \pi} \delta^{\cdot}\left(\sum x_i\right) f_4(x_1 \ldots x_4)\, \Phi_T(x_1 - \lambda_{m+m_1} x_2 + \lambda_{m+m_1} x_3 - \lambda_{m+m_2} x_4 + \lambda_{m+m_2}) \times \right.$$

$$\times dx_1 \ldots dx_4 + \iint\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) f(y)\, \Phi_T(x - \lambda_{m+m_1}\, y + \lambda_{m+m_1}\, y + \lambda_{m+m_2}\, x - \lambda_{m+m_2})\, dx\, dy +$$

$$\left. + \iint\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) f(y)\, \Phi_T(x - \lambda_{m+m_1}\, x + \lambda_{m+m_2}\, y - \lambda_{m+m_2}\, y + \lambda_{m+m_1})\, dx\, dy \right\}, \tag{6}$$

где

$$\Phi_T(x_1 \ldots x_4) = \prod_{i=1}^{4} \frac{\sin T \cdot {}^1\!/_2 x_i}{\sin {}^1\!/_2 x_i}.$$

Будем оценивать по отдельности каждое из трех выражений A_1, A_2, A_3 правой части (6). Согласно работе ([5]) для функции $\Phi_T(x_1 \ldots x_4)$ выполняется следующая оценка:

$$C_4 = \sup_T \frac{1}{4\pi^2 T} \int\limits_{-\pi \leqslant x_i \leqslant \pi} \delta^*(x_1 + \ldots + x_4) \, |\Phi_T(x_1 \ldots x_4)| \, dx_1 \ldots dx_4 < \infty,$$

откуда для первого выражения A_1 правой части (6) вытекает

$$|A_1| \leqslant C_4 C_3 / T.$$

Из свойств гладкости функции $f(\lambda)$, сформулированных в условиях теоремы 2, для выражения A_2 получим

$$\left| A_2 - \sum_k \varphi_T^2(k) f^2(\lambda_m) \right| \leqslant \frac{4\pi^2 C_2^2}{T^2} \sum_k k^2 \varphi_T^2(k) + \frac{4C_1 C_2 \ln T}{T}.$$

Аналогичным образом для A_3 получим

$$\left| A_3 - \sum_k f^2(\lambda_k) \varphi_T(k+m) \varphi_T(k-m) \right| \leqslant \frac{4C_1 C_2 \ln T}{T}.$$

Соединяя вместе оценки для A_1, A_2, A_3, получаем утверждение теоремы 2.

Заметим, что в том случае, когда $\varphi_T(k)$ не зависит от T хотя бы в конечном числе точек k, $D\hat{f}_T(\lambda)$ имеет при $T \to \infty$ предел, отличный от нуля. С точки зрения приложений спектрального анализа представляет интерес функция $\varphi_T(k)$, постоянная на отрезке $[-T^\alpha, T^\alpha]$, $0 < \alpha < 1$, и равная нулю при $T^\alpha < |k| \leqslant {}^1/_2 T$. Для такой функции $\varphi_T(k)$ слагаемое $\sum_k f^2(\lambda_k) \varphi_T(k+m) \cdot$ $\cdot \varphi_T(k-m)$ формулы (5) теоремы 2 равно нулю при всех $T^\alpha < m < T - T^\alpha$. Из теорем 1, 2 следует, что в рассматриваемом случае $D\hat{f}_T \sim CT^{-\alpha}$, а

$$|M\hat{f}_T(\lambda) - f(\lambda)| \leqslant \begin{cases} CT^{-1} & \text{при } \alpha \leqslant {}^1/_2 \\ CT^{2(\alpha-1)} & \text{при } \alpha > {}^1/_2 \end{cases}$$

Из этих двух соотношений получаем, что при $\alpha < {}^4/_5$ оценка $\hat{f}_T(\lambda)$ спектральной плотности $f(\lambda)$ оказывается асимптотически несмещенной. Один из возможных методов выбора наилучших параметров состоит в том, что рассматривается среднеквадратическая ошибка

$$M(\hat{f}_T(\lambda) - f(\lambda))^2 = D\hat{f}_T(\lambda) + (Mf_T(\lambda) - f(\lambda))^2.$$

Асимптотически наилучшая оценка сверху этой величины согласно теоремам 1 и 2 получается при значении $\alpha = {}^4/_5$.

Автор искренне признателен акад. А. Н. Колмогорову за постановку задачи и многочисленные советы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
22 X 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] D. R. Brillinger, Biometrika, 56, 2, 375 (1969). [2] И. А. Ибрагимов. Теория вероятн. и ее применения, 4, 391 (1963). [3] Р. Бенткус, Литовск. матем. сборн., 11, 4, 745 (1971). [4] Р. Бенткус, В. Руткаускас, Там же, 13, 1, 29 (1973). [5] Р. Бенткус, Там же, 12, 1, 55 (1972). [6] E. Parzen, Ann. Math. Stat., 28, 2, 329 (1957). [7] Н. М. Зуев, ДАН, 207, № 4, 773 (1972). [8] И. Г. Журбенко, Теория вероятн. и ее применения, 17, 1, 150 (1972). [9] И. Г. Журбенко, Сибирск. матем. журн., 13, 2, 293 (1972).