Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 5

УДК 519.46/513.88 *МАТЕМАТИКА*

Г. Л. ЛИТВИНОВ

О СЛЕДАХ ОПЕРАТОРОВ И ХАРАКТЕРАХ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ В ЛОКАЛЬНО-ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 30 V 1973)

В работе указаны достаточные условия, при которых каждый ядерный оператор в локально-выпуклом пространстве имеет однозначно определенный след, и достаточные условия, при которых неприводимое непрерывное представление топологической алгебры или группы определяется своим характером с точностью до «функциональной эквивалентности» в смысле Фелла ([5]).

1. Пусть E — отделимое локально-выпуклое пространство над полем комплексных или действительных чисел, E' — сопряженное к E пространство, наделенное слабой топологией $\sigma(E', E)$. Значение функционала $x'\in E'$ на элементе $x\in E$ обозначим через $\langle x', x\rangle$. В дальнейшем для простоты изложения будем предполагать, что E — квазиполное бочечное пространство (например, банахово, полное метризуемое или рефлексивное пространство). Рассмотрим в алгебраическом тензорном произведении $E'\otimes E$ сильнейшую локально-выпуклую топологию, в которой раздельно непрерывно каноническое билинейное отображение $E'\times E\to E'\otimes E$ ($(x', x)\mapsto x'\otimes x$). Пополнение пространства $E'\otimes E$ в этой топологии (называемой индуктивной, см. ([1, 2])) обозначается через $E'\overline{\otimes}E$. Пусть $\{x_i\}$ и $\{x_i'\}$ — ограниченные последовательности в E и E' соответственно, а $\{\lambda_i\}$ — такая числовая последовательность, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|<\infty$. Тогда ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lambda_i x_i'\otimes x_i$ сходится в $E'\overline{\otimes}E$. Элемент $u\in E'\overline{\otimes}E$, допускающий описанное разложение $u=\sum\lambda_i x_i'\otimes x_i$, называется **ядром Фредгольма**. Подпространство (не обязательно замкнутое) в $E'\overline{\otimes}E$, состоящее из всех ядер Фредгольма, обозначается через $E'\overset{\frown}{\otimes}E$. Если пространство E банахово, то $E'\overset{\frown}{\otimes}E$ совпадает с $E'\overline{\otimes}E$.

Сопоставляя каждому линейному непрерывному функционалу на $E'\overline{\otimes}E$ его композицию с каноническим отображением $E'\times E\to E'\overline{\otimes}E$, получим взаимно однозначное соответствие между линейными непрерывными функционалами на $E'\overline{\otimes}E$ и раздельно непрерывными билинейными формами на $E'\times E$. В частности, билинейная форма $(x', x)\mapsto\langle x', x\rangle$ соответствует функционалу, называемому **следом**. След тензора $u\in E'\overline{\otimes}E$ обозначается через $\operatorname{tr} u$. Если $u=\sum\lambda_i x_i'\otimes x_i$, то $\operatorname{tr} u=\sum\lambda_i\langle x_i', x_i\rangle$.

2. Обозначим через $\mathscr{L}(E)$ алгебру всех линейных непрерывных операторов в E, наделенную слабой операторной топологией. Пусть Γ — линейное отображение $E'\overset{\frown}{\otimes}E\to\mathscr{L}(E)$, при котором элемент $u=\sum\lambda_i x_i'\otimes x_i$ переходит в оператор $\Gamma(u): x\mapsto\sum\lambda_i\langle x_i', x\rangle x_i$. Можно проверить, что отображение Γ корректно определено и непрерывно; операторы из $\mathscr{L}(E)$, принадлежащие образу этого отображения, называются **ядерными**. Если $u\in E'\otimes E$, то $\operatorname{tr} u$ совпадает со следом (в обычном смысле) конечномерного оператора $\Gamma(u)$. Если отображение Γ взаимно однозначно, то след любого ядерного оператора $A\in\mathscr{L}(E)$ корректно определен равенством $\operatorname{tr} A=\operatorname{tr}\Gamma^{-1}(A)$. Однако Гро-

тендик (1) доказал, что если существует банахово пространство, не обладающее «аппроксимационным свойством», то для этого пространства возможен такой случай, когда $\operatorname{tr} u \neq 0$, но $\Gamma(u)=0$; соответствующий пример недавно найден Енфло (7). С другой стороны, след любого ядерного оператора в банаховом пространстве однозначно определен, если это пространство обладает «аппроксимационным свойством», в частности, если оно имеет базис (см. (1)).

Если $u \in E' \overline{\otimes} E$, $A \in \mathscr{L}(E)$, положим (по определению) $Au=(1\otimes A)u$ и $uA=({}^tA\otimes 1)u$, где 1 — единичный оператор, а ${}^tA$ — оператор, сопряженный к A. Таким образом, если $u=\sum\lambda_i x_i' \otimes x_i$, то $Au=\sum\lambda_i x_i'\otimes Ax_i$ и $uA=\sum\lambda_i {}^tAx_i'\otimes x_i$. Легко видеть, что $\operatorname{tr}(Au)=\operatorname{tr}(uA)$; если $u\in E'\overline{\oplus} E$, то $Au\in E'\overline{\otimes}E$ и $uA\in E'\overline{\otimes}E$, причем $\Gamma(uA)=\Gamma(u)A$, $\Gamma(Au)=A\Gamma(u)$. Полунормы $A\mapsto|\operatorname{tr}(Au)|$ определяют в $\mathscr{L}(E)$ слабую операторную топологию, если элемент u пробегает алгебраическое тензорное произведение $E'\otimes E$. Рассмотрим топологию в $\mathscr{L}(E)$, задаваемую указанными полунормами, когда u пробегает пространство $E'\overline{\otimes}E$ ядер Фредгольма. Такая топология называется ультраслабой в том случае, когда пространство E гильбертово (см. (3)); мы будем эту топологию называть ультраслабой и в общем случае.

Лемма 1. *Отображение* Γ *взаимно однозначно тогда и только тогда, когда множество конечномерных операторов плотно в пространстве* $\mathscr{L}(E)$, *снабженном ультраслабой топологией.*

Действительно, ядро отображения Γ является ортогональным дополнением образа сопряженного отображения ${}^t\Gamma$. Поэтому для доказательства леммы достаточно проверить, что пространство $\mathscr{L}(E)$ изоморфно слабому сопряженному к $E'\overline{\otimes}E$ (оператор A соответствует при этом изоморфизме функционалу $u\mapsto\operatorname{tr}(Au)$), а множество конечномерных операторов в $\mathscr{L}(E)$ соответствует образу отображения ${}^t\Gamma$. Здесь существенно, что в E' рассматривается слабая топология (а не сильная, как обычно в (1)), что вполне допустимо, см. (2), § 5.

Из теоремы Банаха — Штейнгауза нетрудно вывести, что на ограниченных множествах в $\mathscr{L}(E)$ ультраслабая топология совпадает со слабой операторной топологией. Отсюда вытекает следующая

Лемма 2. *Последовательность (но не сеть!) элементов из* $\mathscr{L}(E)$ *сходится в ультраслабой топологии тогда и только тогда, когда она сходится в слабой операторной топологии.*

Из лемм 1 и 2 вытекает следующая

Теорема 1. *Если любой оператор из* $\mathscr{L}(E)$ *является пределом в слабой операторной топологии какой-нибудь последовательности конечномерных операторов, то отображение* Γ *взаимно однозначно и каждый ядерный оператор в* E *имеет однозначно определенный след.*

Следствие. *Если пространство* E *имеет базис Шаудера, то любой ядерный оператор в* E *имеет однозначно определенный след.*

3. В дальнейшем все линейные пространства и алгебры рассматриваются над полем комплексных чисел. Пусть $\mathfrak{A}$ — ассоциативная топологическая алгебра с раздельно непрерывным умножением и с единицей* (в настоящей работе рассматриваются только такие топологические алгебры). Непрерывным представлением T алгебры $\mathfrak{A}$ в пространстве E будем называть такое непрерывное отображение $T\colon \mathfrak{A}\to\mathscr{L}(E)$, которое является гомоморфизмом алгебр с единицей. Представление T называется вполне неприводимым, если образ гомоморфизма T плотен в $\mathscr{L}(E)$. Представление $T\colon a\mapsto T(a)$ алгебры $\mathfrak{A}$ в E будем называть ультранеприводимым, если образ гомоморфизма T плотен в ультраслабой топологии,

---

* С небольшими изменениями излагаемые ниже результаты справедливы и для алгебр с односторонней или аппроксимативной единицей и даже для алгебр без единицы.

и секвенциально вполне неприводимым, если для любого оператора $A \in \mathscr{S}(E)$ найдется такая последовательность $\{a_n\}$ в $\mathfrak{A}$, что $A = \lim\limits_{n\to\infty} T(a_n)$ в слабой операторной топологии. Ясно, что ультранеприводимое представление вполне неприводимо, а секвенциально вполне неприводимое представление ультранеприводимо (см. лемму 2). С каждым непрерывным представлением T алгебры $\mathfrak{A}$ связан замкнутый двусторонний идеал $\operatorname{Ker} T = \{a \in \mathfrak{A}\colon T(a) = 0\}$ — ядро этого представления. Представления алгебры $\mathfrak{A}$ будем называть изоморфными, если их ядра совпадают (см. ([6])). Для вполне неприводимых представлений изморфизм совпадает с эквивалентностью по Феллу ([5]) (которая для конечномерных неприводимых представлений совпадает с обычной эквивалентностью, определяемой оператором подобия).

Пусть G — локально-компактная группа, $C(G)$ — пространство непрерывных функций на G, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах. Через $\mathscr{M}(G)$ обозначим групповую алгебру (относительно свертки), состоящую из всех комплексных мер Радона с компактным носителем на G, т. е. линейных непрерывных функционалов на $C(G)$, и снабженную слабой топологией $\sigma(\mathscr{M}(G), C(G))$. Можно проверить, что $\mathscr{M}(G)$ — топологическая алгебра и что для каждого непрерывного представления $g \mapsto T_g$ группы G существует такое непрерывное представление $a \mapsto T(a)$ алгебры $\mathscr{M}(G)$, что $T_g = T(\delta_g)$, где δ_g — мера Дирака, сосредоточенная в точке $g \in G$; таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между непрерывными представлениями группы G и алгебры $\mathscr{M}(G)$ (см. ([6])). Непрерывные представления группы G будем называть неприводимыми, изоморфными или эквивалентными, если таковы соответствующие представления алгебры $\mathscr{M}(G)$.

Лемма 3. *Пусть G — локально-компактная группа с массивной компактной подгруппой*, допускающей счетную базу окрестностей единицы (например, G — линейная полупростая группа Ли), и пусть T — вполне неприводимое непрерывное представление группы G в пространстве E.*

Тогда для любого оператора $A \in \mathscr{S}(E)$ найдется такая последовательность $\{a_n\}$ в $\mathscr{M}(G)$, что $A = \lim\limits_{n\to\infty} T(a_n)$ и все операторы $T(a_n)$ конечномерны.

Следствие. *Если выполнены условия леммы 3, то представление T секвенциально вполне неприводимо и любой ядерный оператор в E имеет однозначно определенный след.*

4. Пусть T — непрерывное представление топологической алгебры $\mathfrak{A}$ в пространстве E, и пусть χ — линейный функционал, определенный на плотном двустороннем идеале $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$. Предположим, что для каждого элемента $b \in \mathfrak{B}$ найдется такой тензор $u_b \in E' \overline{\otimes} E$, что: 1) $\Gamma(u_b) = T(b)$, 2) $\chi(ab) = \chi(ba) = \operatorname{tr}(T(a) u_b)$ для всех $a \in \mathfrak{A}$, 3) $\chi(b) = 0$, если $T(b) = 0$. В работе ([8]) (где рассматривается более общая ситуация) такой функционал называется каноническим характером представления T. Если каждый ядерный оператор в E имеет однозначно определенный след, то канонический характер имеет вид $\chi(b) = \operatorname{tr} T(b)$. Каноническим характером непрерывного представления локально-компактной группы G будем называть канонический характер соответствующего представления алгебры $\mathscr{M}(G)$.

Лемма 4. *Пусть χ — канонический характер непрерывного представления T топологической алгебры $\mathfrak{A}$, определенный на плотном идеале $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$, и пусть $T(b) = 0$, если $b \in \mathfrak{B}$ и $\chi(ab) = 0$ для всех $a \in \mathfrak{A}$.*

Тогда представление T определяется функционалом χ с точностью до изоморфизма.

---

* О группах с массивными компактными подгруппами см., например, ([5]). Для таких групп эквивалентность по Феллу совпадает с эквивалентностью по Наймарку.

Действительно, множество $\mathfrak{B} \cap \operatorname{Ker} T$ зависит только от χ, так как состоит из всех таких элементов $b \in \mathfrak{B}$, что $\chi(ab)=0$ для всех $a \in \mathfrak{A}$. Остается заметить, что ядро $\operatorname{Ker} T$ является замыканием этого множества. Отметим, что характер любого унитарного представления локально-компактной группы удовлетворяет условию леммы 4. Из этой же леммы выводится следующая

Теорема 2. *Если ультранеприводимые или секвенциально вполне неприводимые представления T_1 и T_2 топологической алгебры $\mathfrak{A}$ имеют канонические характеры χ_1 и χ_2 соответственно, определенные на плотных идеалах $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ в $\mathfrak{A}$ и если $\chi_1(b)=\chi_2(b)$ для всех $b \in \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2$, то представления T_1 и T_2 эквивалентны по Феллу* ([5]).

5. Все изложенные результаты, кроме леммы 3 и ее следствия, допускают обобщение на случай произвольных локально-выпуклых пространств. При этом следует использовать определения работы ([6]), а вместо ядерных операторов рассматривать операторы Фредгольма (см. ([1], [2])); для справедливости в общем случае следствия теоремы 1 следует требовать существование биортогональных базисов в E и E'. Отметим, что ультранеприводимость представления следует из его тензорной неприводимости в смысле определения, данного в ([4]), если только в этом определении под тензорным произведением понимать пополненное индуктивное тензорное произведение.

Автор выражает искреннюю благодарность Б. С. Митягину и А. И. Штерну за ценные указания.

Поступило
30 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Grothendieck, Mem. Am. Math. Soc., **16**, 1 (1955). A. Grothendieck, Bull. Soc. Math. France, **84**, № 4, 319 (1955); Сборн. пер. Математика, **2**, в. 5 (1958). [3] J. Dixmier, Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien, Paris, 1957. [4] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин, Обобщенные функции, в. 5. М., 1962. [5] J. M. G. Fell, Acta Math., **114**, № 3—4, 491 (1965). [6] Г. Л. Литвинов, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, МГУ, **16**, 267 (1972). [7] P. Enflo, Acta Math., **130**, № 3–4, 309 (1973). [8] Г. Л. Литвинов, ДАН, **214**, № 3 (1974).