Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 4

УДК 550.34.013 *ГЕОФИЗИКА*

В. М. МАРКУШЕВИЧ, Е. Л. РЕЗНИКОВ

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СЕЙСМИКИ ПРИ АПРИОРНОМ ОГРАНИЧЕНИИ СКОРОСТИ

(Представлено академиком М. А. Садовским 5 VI 1973)

1. В статье решается задача определения скорости распространения сейсмической волны по годографу от поверхностного источника в предположении, что скорость больше некоторой априори заданной функции. Считается, что Земля сферически симметрична и скорость зависит только от расстояния до центра.

Ранее в работах ([1], [2]) при решении этой задачи предполагалось и существенно использовалось, что скорость в волноводах может принимать сколь угодно малые значения. Это допущение, по-видимому, физически неправдоподобно. Введенное нами ограничение скорости сужает множество решений обратной задачи геометрической сейсмики, не изменяя его структуры.

2.1. Обратная задача сводится к определению функции $u(y)$ из системы уравнений

$$X(p)=\int\limits_0^{Y(p)}\frac{pu(y)\,dy}{(1-p^2u^2(y))^{1/2}},\quad T(p)=\int\limits_0^{Y(p)}\frac{dy}{u(y)\,(1-p^2u^2(y))^{1/2}},\quad p\in(0,1],\qquad(1)$$

где $Y(p)=\inf\{y;\,pu(y)\geqslant 1\}$.

Решение ищется в классе функций $u(y)$, определенных при $y\in[0,\infty)$ и удовлетворяющих условиям $u(0)=1$, $u(y)\geqslant b(y)>0$, $u(y)$ непрерывна слева, ограничена на каждом конечном интервале, не ограничена на всей полуоси, имеет конечное число волноводов (точное определение волноводов см. в ([1])) и кусочно дважды гладкая вне волноводов. Относительно функции $b(y)$ предполагается, что она монотонно возрастает, ограничена на каждом конечном интервале, не ограничена на всей полуоси, кусочно дважды гладкая и $b(0)<1$.

2.2. Нам потребуются следующие утверждения (см. ([1])):

1. если $u(y)$ имеет n волноводов $j_i=(y_i,\,\bar y_i]$, $i=1,2,\ldots,n$, то функция $\tau(p)=T(p)-pX(p)$ монотонно убывает, непрерывна всюду, кроме значений $p_1>p_2>\ldots>p_n$ и $\tau(p_i-0)-\tau(p_i)=\sigma_i>0$;

2) $Y(p)=\Phi(p)+\Psi(p)$, где

$$\Phi(p)=\frac{2}{\pi}\int\limits_p^1\frac{X(q)\,dq}{(q^2-p^2)^{1/2}},\quad \Psi(p)=\sum_{i,\,p_i>p}A_i(p),$$

$$A_i(p)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{y_i}^{\bar y}\operatorname{arctg}\left(\frac{u^{-2}(y)-p_i^2}{p_i^2-p^2}\right)^{1/2}dy\quad\text{при } p<p_i.$$

3.1. Рассмотрим некоторое решение $u(y)$ с волноводами $j_i(y_i,\,\bar y_i]$, $i=1,\ldots,n$. По определению волновода j_i существуют p_i, σ_i, h_i такие, что $u(y_i)=p_i^{-1}$, $u(y)\leqslant p_i^{-1}$ для $y\in j_i$, $\int\limits_{y_i}^{\bar y_i}(u^{-2}(y)-p_i^2)^{1/2}dy=\sigma_i$ $h_i=\operatorname{mes}\{y;\,u(y)=$ $=p_i^{-1},\,y\in j_i\}=\Phi(p_i-0)-\Phi(p_i)$.

Рассмотрим монотонно возрастающие, непрерывные слева функции

$$F_i(u)=\text{mes}\,\{y;\ y\in j_i,\ u(y)<u\},\quad 0<u\leqslant p_i^{-1},$$

$$v(y)=\text{mes}\,\{u;\ 0<u\leqslant p_i^{-1},\ F_i(u)<y\},\quad y\in j_i.$$

Функции $u(y)$ и $v(y)$ равноизмеримы на полуинтервале j_i и из $u(y)\geqslant b(y)$ следует, что $v(y)\geqslant b(y)$. Поэтому функция $u_1(y)$, равная $u(y)$ при $y\notin j_i$ и $v(y)$ при $y\in j_i$, также является решением.

3.2 Введем монотонную функцию

$$\sigma(y)=\frac{1}{\sigma_i}\int\limits_{y_i}^{y}(v^{-2}(t)-p_i^2)^{1/2}\,dt,\quad y\in[y_i,\bar{y}_i];$$

$\sigma(y_i)=0$, $\sigma(y)\equiv1$, при $y\in[\bar{y}_i-h_i,\ \bar{y}_i]$. Положим $w(\sigma)=v(y(\sigma))$.

Рассмотрим два решения $u^0(y)$ и $u^1(y)$ волноводами j_i^0, j_i^1, $i=1,\ldots,n$.

Определения. Будем говорить, что волновод j_i^0 сильнее, чем волновод j_i^1, если $u^0(y)$ и $u^1(y)$ таковы, что для функций $w^0(\sigma)$ и $w^1(\sigma)$, построенных по ним, выполнено неравенство $w^0(\sigma)\leqslant w^1(\sigma)$ для $\sigma\in[0,1]$. Если $w^0(\sigma)\equiv w^1(\sigma)$, то волноводы j_i^0 и j_i^1 называются эквивалентными. Будем говорить, что решение $u^0(y)$ сильнее, чем решение $u^1(y)$, если при любом i, $i=1,\ldots,n$, волновод j_i^0 сильнее, чем j_i^1.

3.3. Теорема о самом сильном решении. *Если существует какое-либо решение $u(y)$ системы* (1), *то существует единственное решение $u^*(y)$, такое, что $u^*(y)=b(y)$ при $y\in(y_i^*,\bar{y}_i^*-h_i]$, $i=1,\ldots,n$. Это решение $u^*(y)$ сильнее, чем $u(y)$ и $Y^*(p)\leqslant Y(p)$.*

Определение. Назовем $u^*(y)$ самым сильным решением.

4.1. Теорема существования. *Для того чтобы система* (1) *имела решение, необходимо и достаточно, чтобы существовало самое сильное решение $u^*(y)$.*

Замечание. Может случиться, что система (1) имеет лишь единственное решение $u^*(y)$.

4.2. Введем функции $Y^*(p)=\inf\,\{y;\ pu^*(y)\geqslant1\}$, $Y_b(p)=\inf\,\{y;\ pb(y)\geqslant1\}$.

Теорема неединственности. *Для того чтобы существовало решение $u(y)$, отличающееся от $u^*(y)$ при $y\geqslant y_k^*$, необходимо и достаточно, чтобы нашлось $C>0$ такое, что:*

1) $Y^*(p)+C\leqslant Y_b(p)$ *при* $p\in(0,\ p_k)$;

2) *для всех i, $k<i\leqslant n$, для которых не существует положительного $\bar{r}_i$ такого, что $b(y)$ постоянна на интервале $(y_i^*,\ \bar{y}_i^*-h_i+\bar{r}_i)$, и для $i=k$ выполняются неравенства $[Y^*(p)]'<-Cp(p_i^2-p^2)^{-1/2}$ всюду на $(0,\ p_i)$, где $[Y^*(p)]'$ конечна;*

3) $\displaystyle\int\limits_{y_i^*}^{Yb(p_i)}(b^{-2}(y)-p_i^2)^{1/2}dy>\sigma_i$ *для* $i\geqslant k$.

5.1. В этом разделе мы не будем различать решения, которые равноизмеримы внутри волноводов и совпадают вне волноводов. Из каждой такой совокупности выберем решение, которое монотонно возрастает в каждом из волноводов.

Лемма. *Любое решение $u(y)$, которое монотонно возрастает в каждом из своих волноводов, восстанавливается по функциям $Y(p)$ и $F_i(u)$, $i=1,\ldots,n$.*

5.2. Теорема о деформации решения $u(y)$ в решение $u^*(y)$. *Введем n функций $\alpha_i(\omega)$, $i=1,\ldots,n$: $\alpha_i(\omega)=0$ при $0\leqslant\omega\leqslant(i-1)/n$, $\alpha_i(\omega)=n\omega-i+1$ при $(i-1)/n\leqslant\omega\leqslant i/n$* и *$\alpha_i(\omega)=1$ при $i/n\leqslant\omega\leqslant1$. Положим*

$$F_i^\omega(u)=[1-\alpha_i(\omega)]F_i(u)+\alpha_i(\omega)F_i^*(u).$$

Тогда

$$A_i^\omega(p)=[1-\alpha_i(\omega)]A_i(p)+\alpha_i(\omega)A_i^*(p),$$

$$\Psi^\omega(p)=\sum_{i,p_i>p}A_i^\omega(p),\quad Y^\omega(p)=\Phi(p)+\Psi^\omega(p).$$

Так определенные $Y^\omega(p)$ *и* $F_i^\omega(u)$ *задают при каждом* $\omega\in[0, 1]$ *решение* $u^\omega(y)$, *причем* $u^{\omega_1}(y)$ *сильнее, чем* $u^{\omega_2}(y)$, *если* $\omega_1>\omega_2$, *и* $u^0(y)=u(y)$, $u^1(y)=u^*(y)$.

Следствие. *Для любых двух решений* $u_0(y)$ *и* $u_1(y)$ *существует однопараметрическое семейство функций* $Y^\omega(p)$ *и* $F_i^\omega(u)$, $i=1,\ldots,n$, *кусоч-*

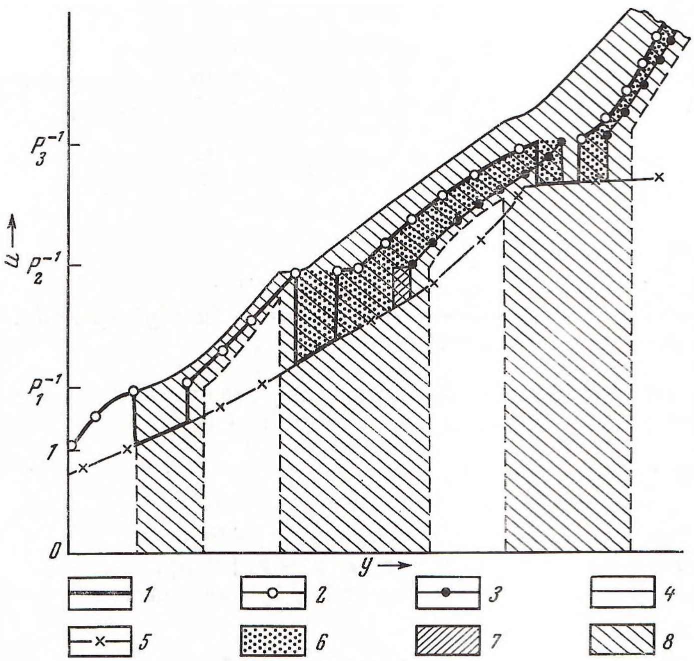

Рис. 1. $1-S$, $2-N(p)$, $3-V(p)$, $4-\Phi(p)$, $5-b(y)$, $6-B\cup(\bigcup_2^n L_i)$, $7-\bigcup_2^n(M_i-L_i)$, 8 – множество решений задачи без ограничения скорости

но-линейно и непрерывно зависящих от параметра ω. *При каждом* $\omega\in[0, 1]$ *функции* $Y^\omega(p)$ *и* $F_i^\omega(u)$ *определяют решение* $u^\omega(y)$ *системы* (1) *и* $u^0(y)=u_0(y)$, $u^1(y)=u_1(y)$.

6. Пусть система (1) имеет более одного решения и все решения $u_\nu(y)$ совпадают при $y\in[0, y_k^*]$. Определим на плоскости (y, u) множество G, каждая точка которого принадлежит графику хотя бы одного решения.

Построим два множества G_0 и G_1 (см. рис. 1) такие, что $G_0\subset G\subset G_1$. Положим $Y^\nu(p)=\inf\{y;\ pu_\nu(y)\geqslant 1\}$ и введем функции $N(p)=\inf\limits_\nu Y^\nu(p)$, $V(p)=\sup\limits_\nu Y^\nu(p)$. По теореме 3.3. $N(p)=Y^*(p)$. Введем множества:

$$S \text{ — график } u^*(y);$$

$$B=\{(y, u);\ u\geqslant p_k^{-1},\ N(u^{-1})<y<V(u^{-1})\};$$

$$L_i=\{(y, u);\ N(p_i)<y<V(p_i-0)-h_i,\ b(y)<u<p_i^{-1}\},\quad i=k,\ldots,n;$$

$$M_i=\{(y, u);\ N(p_i)\leqslant y\leqslant V(p_i-0),\ b(y)\leqslant u\leqslant p_i^{-1}\},\quad i=k,\ldots,n.$$

Если для каждого i, $i=k+1,\ldots,n$, одновременно не выполняются следующие три условия: 1) $h_i=0$; 2) $b(y)=b_i$ при $y\in(N(p_i),\ V(p_i-0))$; 3) $[Y^*(p)]'<Cp(p_i^2-p^2)^{-1/2}$ нарушается при любом $C>0$ для некоторого $p\in(0,\ p_i)$, то $G_0=S\cup B\cup(\bigcup_{i=k}^{n}L_i)$, $G_1=S\cup\bar{B}\cup(\bigcup_{i=k}^{n}M_i)$. Здесь $\bar{B}$ означает замыкание B.

Если для некоторого i, $i>k$, условия 1) — 3) выполняются, то утверждение остается справедливым, если L_i и M_i заменить на L_i' и M_i':

$$L_i'=\{(y,\ u);\ N(p_i)<y<V(p_i-0)-H_i \quad \text{или}$$
$$N(p_i)+H_i<y<V(p_i-0),\ b_i<u<p_i^{-1}\},\quad M_i'=\bar{L}_i',$$

где $H_i=\sigma_i(b_i^2-p_i^2)^{-1/2}$.

Заметим, что M_i' несвязно, если $2H_i>V(p_i-0)-N(p_i)$.

7.1. Множества G_0 и G_1 мы не можем построить алгоритмически, так как не умеем находить $V(p)$. Однако с помощью оценки $\tilde{V}(p)$, $\tilde{V}(p)\geqslant V(p)$, строится множество $\tilde{G}_1$, $\tilde{G}_1\supset G_1$.

7.2. Покажем, что $\tilde{V}(p)=\min(V_1(p),\ Y_b(p))\geqslant V(p)$, где $V_1(p)=\inf\limits_{q\leqslant p}(X(q)\tau(q)/q)^{1/2}$.

Действительно,

$$\frac{X(p)}{p}=\int\limits_0^{Y(p)}\frac{dy}{(u^{-2}(y)-p^2)^{1/2}}\qquad \tau(p)=\int\limits_0^{Y(p)}(u^{-2}(y)-p^2)^{1/2}\,dy.$$

Из неравенства Коши — Буняковского имеем $Y(p)\leqslant(X(p)\tau(p)/p)^{1/2}$. $Y(p)$ монотонно убывает, поэтому $Y(p)\leqslant\inf\limits_{q\leqslant p}(X(q)\tau(q)/q)^{1/2}=V_1(p)$. Так как $Y(p)\leqslant Y_b(p)$, то $\tilde{V}(p)\geqslant V(p)$.

7.3. Построим $N(p)=Y^*(p)$. По $\tau(p)$ и $\Phi(p)$ определим p_i, σ_i, h_i, $i=1,\ldots,n$ (см. п.п. 2.2, 3.1). Положим $Y^*(p)=\Phi(p)$ при $p\in[p_1,\ 1]$ и $y_1^*=Y^*(p_1)$. Определим $u^*(y)=[\inf\{p;\ Y(p)<y\}]^{-1}$ при $0\leqslant y\leqslant y_1^*$.

7.4. Правый конец волновода $j_1=(y_1^*,\ \bar{y}_1^*]$ определим из условия

$$\int\limits_{y_1^*}^{\bar{y}_1^*-h_1}(b^{-2}(y)-p_1^2)^{1/2}\,dy=\sigma_1.$$

Положим $u^*(y)=b(y)$ при $y\in(y_1^*,\ y_1^*-h_1]$ и $u^*(y)=p_1^{-1}$ при $y\in(\bar{y}_1^*-h_1,\ \bar{y}_1^*]$. По формулам п. 2.2 $Y^*(p)$ тогда определится при $p\in[p_2,\ p_1)$. Далее, положим $y_2^*=Y^*(p_2)$ и $u^*(y)=[\inf\{p;\ Y(p)<y\}]^{-1}$ при $\bar{y}_1^*<y\leqslant y_2^*$.

7.5. Повторив рассуждения п. 7.4 n раз, построим $u^*(y)$ и $N(p)=Y^*(p)$. Заменяя в выражениях, определяющих G_1 (см. п. 6) $V(p)$ на $\tilde{V}(p)$, получим эффективно построенное множество $\tilde{G}\supset G$.

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта
Академии наук СССР
Москва

Поступило
15 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Л. Гервер, В. М. Маркушевич, Вычислительная сейсмология, в. 3, «Наука», 1967, стр. 3. [2] М. Л. Гервер, В. М. Маркушевич, Вычислительная сейсмология, в. 4, «Наука», 1968, стр. 15.