Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 6

УДК 534.134 *МЕХАНИКА*

М. Д. ДОЛЬБЕРГ, Н. Н. ЯСНИЦКАЯ

# ОЦЕНКИ СНИЗУ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ. ОБОБЩЕНИЕ ОЦЕНКИ ДАНКЕРЛЕЯ — ПАПКОВИЧА

*(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 8 I 1973)*

В предлагаемой заметке будет изложен метод, позволяющий с любой точностью оценить снизу частоты свободных колебаний некоторых упруго-линейных систем. Если элементарная масса заданной системы $d\sigma(x)+ +d\tau(x)$, то мы будем считать известными частоты и формы свободных колебаний двух систем, отличающихся от заданной лишь тем, что их элементарные массы соответственно равны $d\sigma(x)$ и $d\tau(x)$.

Упруго-линейную систему $\bar{S}$ назовем более мягкой, чем система $S$, в случае, если пространство допустимых перемещений системы $\bar{S}$ содержит пространство допустимых перемещений системы $S$ и на совпадающих перемещениях потенциальная энергия деформации системы $\bar{S}$ не больше потенциальной энергии деформации системы $S$.

Можно показать, что при одинаковом распределении масс частоты колебаний более мягкой системы будут не больше частот колебаний заданной системы. Таким образом, если заданной системе можно поставить в соответствие более мягкую, частоты которой известны, то будут оценены снизу частоты колебаний заданной системы.

Системам, о которых идет речь в этой работе, всегда можно поставить в соответствие более мягкие системы с известными частотами и формами свободных колебаний.

Пусть $H$ — пространство допустимых перемещений $\{u(x)\}$ системы $S$, $I(u)$ — ее потенциальная энергия и $d\sigma(x)+d\tau(x)$ — ее элементарная масса. Предполагаются известными квадраты частот $\{p_i\}$, $\{q_i\}$ и нормированные амплитудные функции $\{y_j(x)\}$, $\{z_j(x)\}$ систем, у которых пространства допустимых перемещений и потенциальные энергии те же, что у $S$, и элементарные массы которых соответственно равны $d\sigma(x)$ и $d\tau(x)$ *.

Система $S_\alpha$, состоящая из двух независимых подсистем с потенциальными энергиями $\alpha I(u_1)$ и $(1-\alpha)I(u_2)$ ($u_1(x)$, $u_2(x)$ — независимые функции из $H$, $0\leqslant\alpha\leqslant1$) и элементарными массами $d\sigma(x)$ и $d\tau(x)$, будет более мягкой, чем $S$. Это очевидно, поскольку при $u_1(x)=u_2(x)$ потенциальная энергия системы $S_\alpha$ равна потенциальной энергии системы $S$.

Понятно, что квадраты частот системы $S$ будут $\{\alpha p_i\}$ и $\{(1-\alpha)q_i\}$, а нормированные фундаментальные функции равны $\{y_i(x)\}$ и $\{z_i(x)\}$.

Если расположить частоты в порядке возрастания, то окажется, что $k$-я частота $\lambda_k(\alpha)$ системы $S_\alpha$ равна

$$\lambda_k(\alpha)=\begin{cases}\alpha p_i & \text{при}\quad (1-\alpha)q_{k-i}\leqslant\alpha p_i\leqslant(1-\alpha)q_{k-i+1},\\ (1-\alpha)q_i & \text{при}\quad \alpha p_{k-j}\leqslant(1-\alpha)q_j\leqslant\alpha p_{k-j+1},\end{cases}$$

откуда следует, что

$$\sup_{0\leqslant\alpha\leqslant1}\lambda_k(\alpha)=\operatorname{Max}\frac{p_iq_{k-i+1}}{p_i+q_{k-i+1}}.$$

---

* Нормировка понимается в обычном смысле: $\int y_i^2\,d\sigma=\int z_i^2\,d\tau=1$.

Учитывая предыдущие замечания, отсюда получим, что квадраты частот $\{\nu_k\}$ системы $S$ подчинены неравенствам

$$1/\nu_k \leqslant \operatorname{Min}\,(1/p_i+1/q_{k-i+1}). \tag{1}$$

Полагая $k=1$, из (2) найдем, что

$$1/\nu_1 \leqslant 1/p_1+1/q_1. \tag{2}$$

Оценка (3) была получена для одной частной задачи Данкерлеем (1), а затем обобщена П. Ф. Папковичем (2).

Понятно, что эти оценки могут оказаться весьма грубыми и требующими улучшения. Уточнение может быть сделано в случае, когда известны не только частоты более мягкой системы, но и формы ее свободных колебаний.

В нашей работе (3) и одновременно в работе (4) были получены результаты, опираясь на которые мы доказали, что если $\{\lambda_i\}$ и $\{\varphi_i(x)\}$ — соответственно расположенные в порядке возрастания квадратуры частоты колебаний и нормированные амплитудные функции системы $\bar{S}$, $d\rho(x)\geqslant 0$ — элементарная масса и $w_i(x)$ — перемещение системы $S$ от нагрузки интенсивности $\varphi_i(x)\,d\rho(x)/dx$, то корни $\mu_i^{(n)}$ полинома

$$\det\left\|\frac{\delta_{ij}}{\mu}-\frac{\delta_{ij}}{\lambda_{n+1}}-K_{ij}\left(1-\frac{\lambda_j}{\lambda_{n+1}}\right)\right\|_{i,j=1}^{n}=0, \tag{3}$$

где $\delta_{ij}$ — символ Кронекера, $K_{ij}=\int w_i\varphi_j\,d\rho(x)$, будут оценивать снизу квадраты первых $n$ частот колебаний системы $S$ *.

Не приводя доказательства этого утверждения, отметим еще, что с ростом $n$ оценки улучшаются и при $n\to\infty$ корни уравнения (3) стремятся к квадратам частот системы $S$.

Выберем в качестве системы $\bar{S}$ систему $S_\alpha$.

Если при заданном $\alpha$ квадрат $(n+1)$-й частоты системы $S_\alpha$ равен $\alpha p_{k+1}$, то квадраты первых $n$ частот этой системы будут (расположенные в порядке возрастания) $\alpha p_i$ $(i=1, 2, \ldots, k)$, $(1-\alpha)q_j$ $(j=1, 2, \ldots, n-k)$. Заметив, что перемещения системы $S$ от нагрузки с интенсивностями $y_i\,d\sigma(x)/dx$, $z_j\,d\tau(x)/dx$ соответственно равны $p_i^{-1}y_i(x)$, $q_j^{-1}z_j(x)$, и переставив в уравнении (3) строки и колонны, получим, что в этом уравнении для нахождения требуемых оценок нужно положить

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_{n+1}}=\begin{cases} p_j p_{k+1}^{-1}, & j\leqslant k,\\[2ex] \dfrac{1-\alpha}{\alpha}\,q_{j-k}p_{k+1}^{-1}, & j>k,\end{cases} \tag{4}$$

$$K_{ij}=K_{ji}=\begin{cases} p_i^{-1}\delta_{ij}, & i,j\leqslant k,\\[1ex] p_{i-k}^{-1}\displaystyle\int y_{i-k}z_j\,d\tau=q_j^{-1}\int y_{i-k}z_j\,d\sigma, & i>k,\ j\leqslant k,\\[1ex] q_{j-k}^{-1}\delta_{ij}, & i,j>k.\end{cases} \tag{5}$$

Из приведенных ранее результатов следует, что корни $\mu_k^{(n)}(\alpha)$, $k=1, 2, \ldots, n$, построенного по указанному правилу уравнения будут при любом $\alpha$ оценивать снизу квадраты частот колебаний системы $S$ и с ростом $n$ оценки будут улучшаться. При $n\to\infty$ $\mu_k^{(n)}(\alpha)\to\nu_k$.

Для получения наилучшей оценки (при заданном $n$) следует заменить функции $\mu_k^{(n)}(\alpha)$ их наибольшими значениями. Такая оптимизация связана с техническими трудностями, но и не проводя ее, можно существенно улучшить оценки (1).

* Если система $S$ несет лишь $k$, $k<\infty$, сосредоточенных масс, то $\lambda_{n+1}=\infty$ и при $n=k$ корни уравнения (3) будут квадратами частот системы $S$.

Так, положив $n=2$ и $\alpha p_2=(1-\alpha)q_2$, из уравнения (3) найдем

$$\frac{1}{\nu_1}\leqslant\frac{1}{\mu_1^{(2)}}=\frac{1}{2}\left[\frac{p_1+p_2}{p_1p_2}+\frac{q_1+q_2}{q_1q_2}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\left(\frac{p_2-p_1}{p_1p_2}+\frac{q_2-q_1}{q_1q_2}\right)^2-4(1-a)\frac{(p_2-p_1)(q_2-q_1)}{p_1p_2q_1q_2}}\right], \qquad (6)$$

где $a=\int y_1z_1d\sigma\int y_1z_1d\tau$, $0\leqslant a\leqslant 1$. При $a\neq 1$ оценка (6) будет лучше оценки (2). Можно привести пример, когда правая часть неравенства (2) в два раза больше правой части неравенства (6). В этом примере $\mu_1^{(2)}=\nu_1$.

Поскольку в теории устойчивости упругих систем задача об определении критических параметров нагрузки с математической точки зрения тождественна задаче об определении частот, то предлагаемый метод пригоден для оценок снизу критических сил.

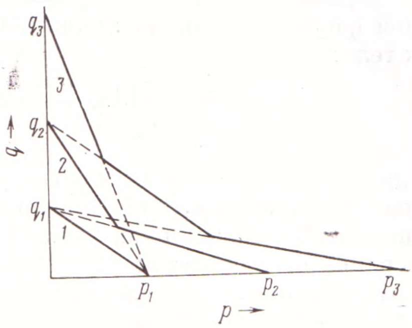


Рис. 1

Если на систему действуют сжимающие силы, зависящие от одного параметра, и требуется найти частоты колебаний этой системы, либо, если на систему действуют сжимающие силы, зависящие от двух параметров, и нужно установить связь между ними при потере устойчивости, то возникает некоторая специальная задача.

В терминах теории колебаний она формулируется так: пусть $d\rho(x, p, q)=$ $=p\,d\sigma(x)+q\,d\tau(x)$, $p, q\geqslant 0$,— элементарная масса системы; требуется установить такую зависимость между параметрами $p$ и $q$, чтобы частота с заданным номером была равна единице.

Понятно, что такая зависимость определяется уравнением $f_k(p, q)=$ $=\nu_k(p, q)-1=0$, где $\nu_k(p, q)$ — $k$-я частота системы с элементарной массой $d\rho(x, p, q)$. Функции $f_k(p, q)=0$ можно аппроксимировать, используя предложенный метод.

Так, заменив в неравенствах (1) $p_i$ и $q_i$ соответственно на $p_ip^{-1}$ и $q_iq^{-1}$, получим, что кривые $f_k(p, q)=0$, $p, q\geqslant 0$, $k=1, 2, \ldots$, будут расположены выше соответствующих ломаных, изображенных на рис. 1 сплошными линиями. Для кривой $f_1(p, q)=0$ этот факт был впервые установлен П. Ф. Папковичем.

Если в формулах (4), (5) также произвести указанную замену и найти $\alpha$ из условия

$$\lambda_{n+1}=\frac{\alpha p_{k+1}}{p}=\frac{(1-\alpha)q_{n-k+1}}{q},$$

то, полагая в (3) $\mu=1$, получим уравнение $R_n(p, q)=0$, где $R_n$ — полином $n$-й степени. Ветви этого полинома при $p, q\geqslant 0$, согласно предыдущему, будут расположены ниже соответствующих кривых $f_k(p, q)=0$.

Выбирая $n$ достаточно большим, можно добиться сколь угодно плотного примыкания $k$-й ветви полинома к кривой $f_k(p, q)=0$.


Харьковское высшее
командно-инженерное училище



Поступило
5 I 1973



Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького


ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА


[1] Dunkerly, Philosophical Transactions, 1894. [2] П. Ф. Папкович, Тр. по строительной механике корабля, 4, 1963. [3] М. Д. Дольберг, Н. Н. Ясницкая, ДАН, 173, № 3 (1967). [4] N. W. Bazley, D. W. Fox, Methods for Lower Bounds to Frequensies Continuous Elastic Systems, Zs. Angew. Math. u. Phys., 17, № 1, 1966.