Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 6

УДК 517.542

МАТЕМАТИКА

М. С. ИОФФЕ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ЦЕЛОМ ДЛЯ КОНФОРМНЫХ И КВАЗИКОНФОРМНЫХ ВЛОЖЕНИЙ ОДНОЙ КОНЕЧНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ДРУГУЮ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 19 II 1973)

1. В [1] изучались конформные и квазиконформные вложения (однолистные отображения) одной конечной римановой поверхности (к.р.п.) $\mathfrak{R}$ в другую к.р.п. $\mathfrak{N}$, и, в частности, были введены множества $V_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{R})$ и $W_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{N})$ в пространствах Тейхмюллера $T(\mathfrak{R})$ и $T(\mathfrak{N})$ соответственно, которые описывают конечные р.п., допускающие конформные вложения в фиксированную к.р.п. $\mathfrak{N}$ (множество $V_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{R})$), и конечные р.п., которые являются продолжением фиксированной к.р.п. $\mathfrak{R}$ (множество $W_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{N})$). Мы продолжим изучение этих множеств и получим решение некоторых экстремальных задач. В частности, будет решена следующая задача о конформной жесткости подобластей на к.р.п. Пусть $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{N}$ — конечные р.п. и $\mathfrak{R}\subset\mathfrak{N}$. Требуется найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы тождественное вложение I: $\mathfrak{R}\to\mathfrak{N}$ было единственным конформным вложением в классе вложений, гомотопных I. В [3] такие области называются конформно жесткими на $\mathfrak{N}$. Заметим, что некоторые достаточные условия были найдены в [3] (см. также [4]) и в [5]. Кроме того выясняется, что множество тех к.р.п. из $V_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{R})$, для которых имеет смысл рассматривать конформные вариации данного конформного вложения I': $\mathfrak{R}'\to\mathfrak{N}$, есть $\operatorname{int} V_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{R})$, а $\partial V_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{R})$ состоит из поверхностей, для которых существует единственное конформное вложение в $\mathfrak{N}$ в соответствующем классе гомотопных вложений.

2. Под конечной р.п. $\mathfrak{R}$ везде в дальнейшем мы будем понимать ориентированную р.п., имеющую конечный род $g\geqslant0$, конечное число невырожденных граничных компонент $n\geqslant0$ и конечное число выколотых точек $\{p_1, p_2, \ldots, p_l\}$, $l\geqslant0$. Дополнительно будем предполагать, что $6g+3n+2l-6>0$, и такую к.р.п. будем называть к.р.п. типа $[g, n, l]$.

Квадратичный дифференциал $\varphi(z)\,dz^2$ на $\mathfrak{R}$ будем называть конечным, если: 1) φ регулярен на $\mathfrak{R}$, 2) точки p_i, $i=1, 2, \ldots, l$, либо устранимы, либо могут быть полюсами первого порядка дифференциала φ и 3) $\operatorname{Im}(\varphi(z)\times dz^2)=0$ вдоль невырожденных граничных компонент $\mathfrak{R}$. Если вместо 3) имеет место 3′) $\varphi(z)\,dz^2\geqslant0$, то φ называется положительным. Действительное векторное пространство конечных квадратичных дифференциалов на $\mathfrak{R}$ обозначим через $Q(\mathfrak{R})$, а конус положительных дифференциалов в $Q(\mathfrak{R})$ — через $Q^+(\mathfrak{R})$. Тогда $\dim Q(\mathfrak{R})=6g+3n+2l-6$.

Максимальная регулярная кривая на $\mathfrak{R}$, вдоль которой $\varphi(z)\,dr^2>0$, называется траекторией дифференциала φ. Область $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{R}$ называется допустимой по отношению к дифференциалу $\varphi\in Q^+(\mathfrak{R})$, если $\mathfrak{M}$ получается из $\mathfrak{R}$ проведением конечного числа разрезов вдоль дуг траекторий дифференциала φ (см. [2]).

Пусть f: $\mathfrak{R}\to\mathfrak{N}$ — квазиконформное вложение. Обозначим через $E(\{f\}; \mathfrak{R}, \mathfrak{N})$ класс вложений $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{N}$, гомотопных f. Квазиконформное вложение $f_0\in E(\{f\}; \mathfrak{R}, \mathfrak{N})$ будем называть экстремальным в классе $E(\{f\}; \mathfrak{R}, \mathfrak{N})$, если $K[f_0]\leqslant K[f']$ по всем $f'\in E(\{f\}; \mathfrak{R}, \mathfrak{N})$, где $K[f']$ обозначает максимальную дилатацию квазиконформного отображения f'.

Пусть f: $\mathfrak{R}\to\mathfrak{N}$ — топологическое вложение. Мы будем называть f нормированным, если для соответствующего гомоморфизма фундаментальных групп f_*: $\pi_1(\mathfrak{R})\to\pi_1(\mathfrak{N})$ группа $\operatorname{im} f_*$ имеет не менее двух образующих.

Тогда справедлива следующая теорема, уточняющая и дополняющая теоремы 2 и 3 из ([1]) (в ([1]) вместо «Теорема 4» должно быть «Теорема 3»).

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{N}$ — конечные р.п. f: $\mathfrak{R}\to\mathfrak{N}$ — нормированное квазиконформное вложение и в классе $E(\{f\};\mathfrak{R},\mathfrak{N})$ не существует конформного вложения.*

Тогда в $E(\{f\};\mathfrak{R},\mathfrak{N})$ существует единственное экстремальное квазиконформное вложение f_0, которому соответствует дифференциал $\psi_0(w)\,dw^2\in Q^+(\mathfrak{N})$ такой, что

1) область $\mathfrak{M}=f_0(\mathfrak{R})$ допустима по отношению к $\psi_0\in Q^+(\mathfrak{N})$,

2) дифференциал Бельтрами отображения f_0^{-1} равен

$$\nu_0(w)\frac{d\bar{w}}{dw}=-k_0\frac{\overline{\psi_0(w)}}{|\psi_0(w)|}\frac{d\bar{w}}{dw},\qquad 0<k_0<1.$$

Обратно, если вложение f_0: $\mathfrak{R}\to\mathfrak{N}$ удовлетворяет условиям 1) и 2), то оно экстремально в классе $E(\{f_0\};\mathfrak{R},\mathfrak{N})$.

Используя эту теорему и ее доказательство, можно полностью решить вопрос о конформной жесткости допустимых областей на к.р.п. $\mathfrak{N}$ относительно дифференциалов из $Q^+(\mathfrak{N})$. Ранее этот вопрос обсуждался в ([3]) (замечания к ([3]) см. в ([4])).

Теорема 2. *Если $\mathfrak{M}$ — допустимая область на $\mathfrak{N}$ по отношению к $\psi_0\in Q^+(\mathfrak{N})$ и тождественное вложение I: $\mathfrak{M}\to\mathfrak{N}$ нормированно, то I — единственное конформное вложение в классе $E(\{I\};\mathfrak{M},\mathfrak{N})$. Области, допустимые по отношению к дифференциалу $\psi_0\in Q^+(\mathfrak{N})$, являются либо конформно жесткими, либо представляют собой кольцевую область, соответствующую дифференциалу ψ_0 (см. ([2])) с конечным числом разрезов по дугам замкнутых траекторий; их можно сделать конформно жесткими, выколов одну точку.*

3. Пусть $\mathfrak{R}$ — фиксированная к.р.п. Пара $(\mathfrak{R}', f')$, где f': $\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}'$ — квазиконформный гомеоморфизм, называется отмеченной к.р.п. На множестве отмеченных конечных р.п. вводится отношение эквивалентности: $(\mathfrak{R}',f')\sim\sim(\mathfrak{R}'',f'')$, тогда и только тогда, когда существует конформный гомеоморфизм h: $\mathfrak{R}'\to\mathfrak{R}''$, гомотопный $f''\circ(f')^{-1}$. Класс эквивалентности, содержащий пару $(\mathfrak{R}', f')$, будем обозначать $[\mathfrak{R}', f']$ или просто $[\mathfrak{R}']$. $[\mathfrak{R}']$ называется поверхностью Тейхмюллера.

Множество поверхностей Тейхмюллера образует пространство Тейхмюллера $T(\mathfrak{R})$, в котором вводится метрика $d([\mathfrak{R}',f'],[\mathfrak{R}'',f''])=\inf\log K[f]$, где inf берется по всем квазиконформным гомеоморфизмам f: $\mathfrak{R}'\to\mathfrak{R}''$, гомотопным $f''\circ(f')^{-1}$. Известно (ссылки на литературу см. в ([6])), что метрическое пространство $T(\mathfrak{R})$ гомеоморфно эвклидову пространству $E^{6g+3n+2l-6}$.

Пусть $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{N}$ — к.р.п. и I: $\mathfrak{R}\to\mathfrak{N}$ — конформное вложение. Обозначим через $V_{\mathfrak{N}}{}^K(\mathfrak{R})$ множество точек $[\mathfrak{R}']=[\mathfrak{R}',f']\in T(\mathfrak{R})$, для которых в классе $E(\{I\circ(f')^{-1}\};\mathfrak{R}',\mathfrak{N})$ (обозначим его $E([\mathfrak{R}'],\mathfrak{N})$ существует K-квазиконформное вложение. Аналогично определим $W_{\mathfrak{R}}^K(\mathfrak{N})$ как множество, состоящее из точек $[\mathfrak{N}']=[\mathfrak{N}',h']\in T(\mathfrak{N})$, для которых существует K-квазиконформное вложение в классе $E(\{h'\circ I\};\mathfrak{R},\mathfrak{N}')$ (обозначим его $E(\mathfrak{R},[\mathfrak{N}'])$). Заметим, что множества $W_{\mathfrak{N}}{}^K(\mathfrak{R})$ и $W_{\mathfrak{R}}^K(\mathfrak{N})$, вообще говоря, зависят от I. При $K=1$ эти множества совпадают с введенными в ([1]) множествами $V_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{R})$ и $W_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{N})$.

Пусть $d([\mathfrak{R}'],U)$ — расстояние от точки $[\mathfrak{R}']\in T(\mathfrak{R})$ до множества $U\subset T[\mathfrak{R}]$.

Предложение 1.

I. $V_{\mathfrak{N}}{}^K(\mathfrak{R})=\{[\mathfrak{R}']\in T(\mathfrak{R}):\ d([\mathfrak{R}'],V_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{R}))\leqslant\log K\}$.

II. $W_{\mathfrak{R}}^K(\mathfrak{N})=\{[\mathfrak{N}']\in T(\mathfrak{N}):\ d([\mathfrak{N}'],W_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{N}))\leqslant\log K\}$.

На основании теоремы 1 нетрудно установить, что $d([\mathfrak{R}'],V_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{R}))$ реализуется в единственной точке множества $V_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{R})$. То же верно и для W $(\mathfrak{N})$. Используя геометрические свойства Тейхмюллеровых пространств ([7]), можно построить деформации Π: $T(\mathfrak{R})\times[0,1]\to T(\mathfrak{R})$ и P: $T(\mathfrak{R})\times[0,1]\to T(\mathfrak{R})$ такие, что $\Pi_0=\Pi(\cdot,0)$ и $P_0=P(\cdot,0)$ — тождественные отображения, $\Pi_t=\Pi(\cdot,t)$ и $P_t=P(\cdot,t)$ отображают $T(\mathfrak{R})$ и $T(\mathfrak{R})$ на $V_{\mathfrak{R}}^{1/t}(\mathfrak{R})$ и на $W_{\mathfrak{R}}^{1/t}(\mathfrak{R})$ и тождественны на $V_{\mathfrak{R}}^{1/t}(\mathfrak{R})$ и на $W_{\mathfrak{R}}^{1/t}(\mathfrak{R})$. Таким образом, имеем

Предложение 2. *Множества* $V_{\mathfrak{R}}^K(\mathfrak{R})$ *и* $W_K(\mathfrak{R})$ — *деформационные ретракты пространств* $T(\mathfrak{R})$ *и* $T(\mathfrak{R})$.

Теорема 3. *Множества* $V_{\mathfrak{R}}^K(\mathfrak{R})$ *и* $W_{\mathfrak{R}}^K(\mathfrak{R})$ — *замкнутые области и при* $K>1$

I. 1) $\operatorname{int} V_{\mathfrak{R}}^K(\mathfrak{R})=\{[\mathfrak{R}']\in T(\mathfrak{R}):\ d([\mathfrak{R}'],V_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}))<\log K\}$,

2) $\partial V_{\mathfrak{R}}^K(\mathfrak{R})=\Gamma_K=\{[\mathfrak{R}']\in T(\mathfrak{R}):\ d([\mathfrak{R}'],V_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}))=\log K\}$;

II. 1) $\operatorname{int} W_{\mathfrak{R}}^K(\mathfrak{R})=\{[\mathfrak{R}']\in T(\mathfrak{R}):\ d([\mathfrak{R}'],W_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}))<\log K\}$,

2) $\partial W_{\mathfrak{R}}^K(\mathfrak{R})=\Delta_K=\{[\mathfrak{R}']\in T(\mathfrak{R}):\ d([\mathfrak{R}'],W_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}))=\log K\}$.

Если рассмотреть сужения $\Pi_{t_1}|_{\Gamma_{1/t_2}}=\Pi_{t_1}^{t_2}$ и $P_{t_1}|_{\Delta_{1/t_2}}=P_{t_1}^{t_2}$ при $t_2\leqslant t_1$, то справедливо

Предложение 3. *Пусть* $t_1<1$, $t_2\leqslant t_1$. *Тогда* $\Pi_{t_1}^{t_2}$: $\Gamma_{1/t_2}\to\Gamma_{1/t_1}$ *и* $P_{t_1}^{t_2}$: $\Delta_{1/t_2}\to\Delta_{1/t_1}$ — *гомеоморфизмы.*

При $t_1=1$ отображения Π_1^t: $\Gamma_{1/t}\to\Gamma$ и P_1^t: $\Delta_{1/t}\to\Delta$ сюръективны, где $\Gamma=\partial V_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})$ и $\Delta=\partial W_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})$.

Замечание. Отображения Π_1^t и P_1^t, вообще говоря, не взаимно однозначны.

И, наконец, для множеств $V_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})$ и $W_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})$ справедлива

Теорема 4.

I. $[\mathfrak{R}']\in\operatorname{int} V_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})$ *тогда и только тогда, когда в классе* $E([\mathfrak{R}'],\mathfrak{R})$ *существует конформное вложение* I: $\mathfrak{R}'\to\mathfrak{R}$ *такое, что* $\operatorname{int}(\mathfrak{R}\setminus I(\mathfrak{R}'))\neq\phi$.

II. $[\mathfrak{R}']\in\operatorname{int} W_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})$ *тогда и только тогда, когда в классе* $E(\mathfrak{R},[\mathfrak{R}'])$ *существует конформное вложение* I: $\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}'$ *такое, что* $\operatorname{int}(\mathfrak{R}'\setminus I(\mathfrak{R}))\neq\phi$.

Конформное вложение I: $\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}$ назовем экстремальным, если область $\mathfrak{M}=I(\mathfrak{R})$ допустима относительно некоторого дифференциала $\psi\in Q^+(\mathfrak{R})$.

Теорема 5. I. *Следующие условия эквивалентны*:

1) $[\mathfrak{R}']\in\partial V_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})$;

2) *в* $E([\mathfrak{R}'],\mathfrak{R})$ *существует единственное конформное вложение*;

3) *в* $E([\mathfrak{R}'],\mathfrak{R})$ *существует экстремальное конформное вложение.*

II. *Для множества* $W_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})$ *эквивалентны аналогичные условия с заменой в* (1) $[\mathfrak{R}']\in\partial V_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})$ *на* $[\mathfrak{R}']\in\partial W_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})$, *а в* 2) и 3) — *класса* $E([\mathfrak{R}'],\mathfrak{R})$ *на* $E(\mathfrak{R},[\mathfrak{R}'])$.

4. Множества типа $W_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})$ уже рассматривались раньше ([8]) для случая, когда $\mathfrak{R}$ — открытая р.п. конечного рода $g>1$, а $\mathfrak{R}$ — замкнутая р.п. того же рода. В ([8]) доказана замкнутость, связность и ограниченность множества $W_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})$. Ограниченность множеств $V_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})$ и $W_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})$ имеет место только для множества $W_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})$ и только в том случае, когда $\mathfrak{R}$ — замкнутая р.п. того же рода, что и $\mathfrak{R}$.

5. В качестве приложения мы можем получить новые канонические области для конечносвязных областей. Пусть D — конечносвязная область, из которой выколото $n\geqslant4$ точек, и пусть S — сфера, из которой выколото $m\geqslant4$ точек. Рассмотрим множество $W_D(S)\subset T(S)$. Тогда, если $W_D(S)\neq\neq T(S)$, то граничным точкам $\partial W_D(S)$ соответствуют на S канонические области для D, полученные из S проведением конечного числа разрезов вдоль дуг траекторий конечных положительных квадратичных дифференциалов на S.

Ташкентский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
6 I 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. С. Иоффе, ДАН, **202**, № 2, 270 (1972). [2] Дж. Дженкинс, Однолистные функции и конформные отображения, ИЛ, 1957. [3] H. L. Royden, Trans. Am. Math. Soc., **76** (1954). [4] J. A. Jenkins, Proc. Am. Math. Soc., **10**, № 3 (1959). [5] П. М. Тамразов, Матем. сборн., **72**, в. 1, 59 (1967). [6] С. Л. Крушкаль, Сибирск. матем. журн., **13**, № 2, 349 (1972). [7] S. Kravetz, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. Al, № 278 (1959). [8] K. Oikawa, Kodai Math. Sem. Rep., **9**, № 1, 34 (1957).