Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 6

УДК 517.9 *МАТЕМАТИКА*

А. В. КОЗАК

ЛОКАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП В ТЕОРИИ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 III 1973)

Вопрос о применимости проекционного метода (см. ([1])) к линейному ограниченному оператору в банаховом пространстве, аналогично вопросу о его нётеровости, может быть сведен к исследованию обратимости элемента некоторой банаховой алгебры. Оказывается, что при наведении в этой алгебре соответствующей локальной структуры обратимость ее элемента может быть изучена методом, аналогичным «локальному» методу И. Б. Симоненко ([2]) исследования операторов на нётеровость. В настоящей работе указанный метод И. Б. Симоненко обобщается на случай произвольной банаховой алгебры. В качестве приложения дается ряд критериев применимости проекционного метода типа редукции к многомерным уравнениям типа свертки.

1°. Пусть A — банахова алгебра с единицей e, X — бикомпактное хаусдорфово пространство, а Σ_X — борелевская структура X.

Определение 1. Будем говорить, что отображение $p(\Sigma_X\to A)$ порождает локальную структуру в алгебре A над пространством X, если выполняются условия:

1) $p(X)=e$;
2) $p(u\cap v)=p(u)\cdot p(v)$;
3) $p(u\cup v)=p(u)+p(v)$, если $u\cap v=\varnothing$;
4) $\sup\limits_{u\in\Sigma_X}|p(u)|<\infty$.

Пусть задано некоторое отображение $p(\Sigma_X\to A)$, порождающее локальную структуру в A над X.

Определение 2. Элемент $a\in A$ называется элементом локального типа, если для любых двух замкнутых непересекающихся множеств $u, v\in\Sigma_X$ $p(u)\cdot a\cdot p(v)=0$.

Множество элементов локального типа, являющееся подалгеброй алгебры A, обозначим через A'.

Определение 3. Элемент $a\in A$ называется локально обратимым слева (справа) в точке $x\in X$, если существуют окрестность u точки x и элемент $b\in A$ такие, что $b\cdot a\cdot p(u)=p(u)$ $(p(u)\cdot b=p(u))$. Элемент $a\in A$ называется локально обратимым в точке $x\in X$, если он локально обратим слева и справа в этой точке.

Теорема 1. *Для того чтобы элемент $a\in A'$ был обратим в A, необходимо и достаточно, чтобы он был локально обратим в каждой точке $x\in X$.*

Определение 4. Элементы $a, b\in A$ называются эквивалентными в точке $x\in X$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует окрестность u точки x такая, что $|(a-b)\cdot p(u)|<\varepsilon$ и $|p(u)\cdot(a-b)|<\varepsilon$.

Сокращенно будем писать axb.

Теорема 2. *Пусть $a, b\in A$, $x\in X$ и axb. Если элемент a локально обратим слева (справа) в точке x, то и элемент b локально обратим слева (справа) в той же точке.*

Рассмотрим банаховы алгебры A и B с локальными структурами над пространствами X и Y, порожденными отображениями $p(\Sigma_X\to A)$ и $p'(\Sigma_Y\to B)$.

Определение 5. Будем говорить, что элемент $a\in A$ в точке $x\in X$ квазиэквивалентен элементу $b\in B$ в точке $y\in Y$, если существуют окрестности u, v точек x, y, гомеоморфное отображение φ u на v и изоморфное отображение T подалгебры $p(u)Ap(u)$ на подалгебру $p'(v)Bp'(v)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\varphi(x)=y$;

2) для любого $w\in\Sigma_x$, $w\subset u$, $T(p(w))=p'(\varphi(w))$;

3) $T(p(u)\cdot a\cdot p(u))\overset{y}{\sim}p'(v)\cdot b\cdot p'(v)$.

Сокращенно будем писать $a\overset{x}{\sim}\overset{y}{\sim}b$.

Теорема 3. *Пусть $a\in A'$, $b\in B$, $x\in X$, $y\in Y$ и $a\overset{x}{\sim}\overset{y}{\sim}b$. Если элемент a локально обратим слева (справа) в точке x, то элемент b локально обратим слева (справа) в точке y.*

Заметим, что определения 2—5 и доказательства теорем 1—3 несущественно отличаются от соответствующих определений и доказательств работы ([2]).

2°. Применение результатов п. 1° в теории проекционных методов проиллюстрируем на примере многомерных интегральных сверток.

В пространстве $L_q^n(E_m)$, $1\leqslant q<\infty$, u, $m\geqslant 1$, рассмотрим оператор $\mathscr{A}$,

$$(\mathscr{A}f)(x)=cf(x)+\int\limits_{E_m}a(x-y)f(y)\,dy, \tag{1}$$

где $c=\|c_{ij}\|_{i,j=1}^n$, c_{ij} — комплексные числа, $a(x)=\|a_{ij}(x)\|_{i,j=1}^n$, $a_{ij}\in L_1(E_m)$.

Пусть M — замкнутое ограниченное* множество в E_m. Будем предполагать, что для каждой точки x границы $\mathrm{Fr}\,(M)$ множества M существуют конус K_x с вершиной в x**, окрестности u, v точки x и гладкое гомеоморфное отображение φ u на v с единичной матрицей Якоби в точке x такие, что $\varphi(x)=x$ и $\varphi(M\cap u)=K_x\cap v$.

Пусть ω — некоторое неограниченное множество положительных чисел. Определим проекторы $\mathscr{P}_{\tau M}$ $(\tau\in\omega)$ формулой

$$(\mathscr{P}_{\tau M}f)(x)=\begin{cases}f(x), & x\in\tau M\\ 0, & x\notin\tau M,\end{cases}$$

где $f\in L_q^n(E_m)$.

Теорема 4. *Для того чтобы при $\tau\to\infty$ $(\tau\in\omega)$, начиная с некоторого τ_0, операторы $\mathscr{P}_{\tau M}\mathscr{A}\mathscr{P}_{\tau M}$ $(\mathscr{P}_{\tau M}L_q^n\to\mathscr{P}_{\tau M}L_q^n)$ были обратимы и выполнялось условие $\sup\limits_{\tau\in\omega,\ \tau\geqslant\tau_0}|(\mathscr{P}_{\tau M}\mathscr{A}\mathscr{P}_{\tau M})^{-1}|<\infty$, необходимо и достаточно, чтобы для всех $x\in\mathrm{Fr}\,(M)$ были обратимы операторы $\mathscr{P}_{K_x}\mathscr{A}\mathscr{P}_{K_x}$ $(\mathscr{P}_{K_x}L_q^n\to\mathscr{P}_{K_x}L_q^n)$.*

Замечание. Пусть K — конус с вершиной в нуле. Если $M\subset K$ и $\mathscr{P}_{\tau M}$ сильно сходится к $\mathscr{P}_K$ при $\tau\to\infty$, то теорема дает критерий применимости проекционного метода по системе проекторов $\{\mathscr{P}_{\tau M}\}_{\tau\in\omega}$ к оператору $\mathscr{P}_K\mathscr{A}\mathscr{P}_K$.

Отметим основные моменты доказательства теоремы.

Через $\tilde{E}_m$ обозначим бикомпактное расширение пространства E_m, при котором каждому лучу, выходящему из начала координат, ставится в соответствие бесконечно удаленная точка. Топология в E_m определяется так же, как и в ([3]). Пусть X — замкнутое подмножество $\tilde{E}_m$. Через $\mathfrak{A}_X$ обозначим банахову алгебру семейств $\{\mathscr{A}_\tau\}_{\tau\in\omega}$ ограниченных в $\mathscr{P}_{\tau X}L_q^n$ операторов

* Требование ограниченности множества M является несущественным. Можно указать достаточно широкий класс неограниченных множеств, для которых последующие результаты сохраняют силу.

** Подмножество K_x в E_m называется конусом с вершиной в точке x, если для любого $\lambda>0$ вместе с точкой $y\in K_x$ точка $\lambda(y-x)+x\in K_x$.

$\mathscr{A}_\tau$ таких, что $\sup\limits_{\tau\in\omega} |\mathscr{A}_\tau|<\infty$. Операции в $\mathfrak{A}_X$ вводятся покоординатно, $|\{\mathscr{A}_\tau\}_{\tau\in\omega}|_{\mathfrak{A}_X} = \sup\limits_{\tau\in\omega} |\mathscr{A}_\tau|$. Пусть J — следующий идеал в $\mathfrak{A}_X$,

$$J=\{\{\mathscr{A}_\tau\}_{\tau\in\omega}\in\mathfrak{A}_X:\ |\mathscr{A}_\tau|\to 0 \text{ при } \tau\to\infty\},$$

A_X — фактор-алгебра $\mathfrak{A}_X/J$. Через p обозначим отображение из Σ_X в A_X, которое каждому множеству $u\in\Sigma_X$ ставит в соответствие элемент $p(u)\in A_X$, порожденный семейством $\{\mathscr{P}_{\tau u}\}_{\tau\in\omega}\in\mathfrak{A}_X$. Это отображение определяет локальную структуру в алгебре A_X над пространством X. Через a_X обозначим элемент из A_X, порожденный семейством $\{\mathscr{P}_{\tau X}\mathscr{A}\mathscr{P}_{\tau X}\}_{\tau\in\omega}\in\mathfrak{A}_X$.

Доказательство теоремы вытекает из теорем пункта 1^0 и трех следующих предложений.

Предложение 1. *Элемент $a_{E_m}{}^{\sim}$ локального типа.*

Предложение 2. *Пусть K — замкнутый конус с вершиной в точке x. Для того чтобы оператор $\mathscr{P}_K\mathscr{A}\mathscr{P}_K$ $(\mathscr{P}_K L_q{}^n\to\mathscr{P}_K L_q{}^n)$ был обратим, необходимо и достаточно, чтобы элемент a_K был локально обратим в точке x.*

Предложение 3. *Для всех $x\in\mathrm{Fr}\,(M)$ $a_M\overset{x}{\sim}\overset{x}{\sim}a_{K_x}$.*

Укажем некоторые частные случаи.

Если множество M имеет гладкую границу и $0\in\operatorname{int} M$, то при $n=1$, $m\geqslant 2$ из обратимости оператора (1) вытекает применимость к нему проекционного метода по системе проекторов $\{\mathscr{P}_{\tau M}\}_{\tau\in\omega}$.

Пусть $M=\{(x, y)\in E_2:\ 0\leqslant x,\ y\leqslant 1\}$. Для того чтобы к интегральному оператору Винера — Хопфа в четверть-плоскости был применим проекционный метод по системе проекторов $\{\mathscr{P}_{\tau M}\}_{\tau\in\omega}$, необходимо и достаточно, чтобы вместе с самим оператором был обратим оператор, транспонированный к нему по одной из переменных.

Аналогичный факт имеет место для дискретного оператора Винера — Хопфа в четверть-плоскости. В частности, указанный проекционный метод всегда применим к операторам, рассмотренным в работе ([4]).

Предложения, аналогичные теореме 4, имеют место для обобщенных и составных сверток, введенных в ([3]), а также их дискретных аналогов.

Заметим, что теорема 4 обобщает ряд известных результатов для одномерных операторов типа свертки, теория проекционных методов которых в настоящем разработана достаточно полно (см. ([1])). В частности, при $m=1$ получаем предложения, эквивалентные теоремам И. Ц. Гохберга и И. А. Фельдмана (см. ([1]), гл. III, теорема 3.1 и гл. VIII, теорема 6.2). Отметим также, что случай $n=1$, $m\geqslant 2$, $M=\{(x_1,\ldots,x_m)\in E_m:\ 0\leqslant x_1\leqslant 1\}$ для дискретного аналога оператора (1) был изучен Л. С. Гольденштейном ([5]). Критерий применимости метода редукции к двумерному уравнению Винера — Хопфа в случае полуполосы ($M=\{(x, y)\in E_2:\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ y\geqslant 0\}$) известен нам из неопубликованной работы Л. И. Сазонова.

В заключение выражаю искреннюю благодарность В. Б. Дыбину, руководившему работой.

Ростовский государственный
университет

Поступило
15 II 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман, Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, «Наука», 1971. [2] И. Б. Симоненко, Изв. АН СССР, сер. матем., **29**, 3 (1965). [3] И. Б. Симоненко, Матем. сборн., **74**, 2 (1967). [4] В. А. Малышев, ДАН, **187**, № 6 (1969). [5] Л. С. Гольденштейн, Матем. исследования, **2**, в. 3 (1967).