Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 6

УДК 510.1:517.12 *МАТЕМАТИКА*

А. С. КУЗИЧЕВ

СИСТЕМА λ-КОНВЕРСИИ С ДЕДУКТИВНЫМ ОПЕРАТОРОМ ФОРМАЛЬНОЙ ИМПЛИКАЦИИ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 28 II 1973)

Работа посвящена проблеме введения логических связок в теорию λ-конверсии А. Чёрча ([1-3]). Предлагается дедуктивное расширение* λ-конверсии на основе генценовской теории секвенций с правилами введения формальной импликации Ξ в сукцедент и антецедент. Показывается, что язык предложенной конструкции замкнут по отношению ко всем логическим связкам.

I. Алфавит. λ Ξ □ | ( ) → ⇒

Переменные. Если a — непустое слово в алфавите □, то $|a|$ считается переменной. Переменные обозначаются буквами x, y, z, t.

Обы. 1) Ξ и переменные считаются обами; 2) если a — об, то (λxa) считается обом; 3) если a и b — обы, то (ab) считается обом. Обы обозначаются буквами a, b, c, d; Γ, Δ — наборы (возможно, пустые) обов. λ — оператор абстракции; выражение «$x\bar{\in}a_1, \ldots, a_n$» означает, что x не имеет свободных вхождений в $a_1, \ldots, a_n$. Результат одновременной подстановки $a_1, \ldots, a_n$ в об a вместо соответствующих свободных вхождений графически различных переменных $x_1, \ldots, x_n$ обозначается через $[a_1, \ldots, a_n/x_1, \ldots, x_n]a$. Ниже для краткости некоторые скобки в обах опущены, они восстанавливаются по принципу: «скобки влево».

Секвенции. Слова вида $a\to b$ и $\Gamma\Rightarrow\Delta$ считаются секвенциями.

Постулаты λ-конверсии.

$$\alpha:\ \lambda xa\to\lambda y[y/x]a,\ y\bar{\in}a;\qquad \beta:\ (\lambda xa)b\to[b/x]a;$$

$$\mu:\frac{a\to b}{ca\to cb};\quad \nu:\frac{a\to b}{ac\to bc};\quad \xi:\frac{a\to b}{\lambda xa\to\lambda xb};\quad \tau:\frac{a\to b;\ b\to c}{a\to c};\quad \sigma:\frac{a\to b}{b\to a}.$$

Постулаты Ξ-расширения.

$$\frac{a\to b}{a\Rightarrow b};\quad \frac{\Gamma\Rightarrow a}{b,\Gamma\Rightarrow a};\quad \frac{\Gamma, a, b, \Delta\Rightarrow c}{\Gamma, b, a, \Delta\Rightarrow c};\quad \frac{a, a, \Gamma\Rightarrow b}{a, \Gamma\Rightarrow b};\quad \frac{\Gamma\Rightarrow a;\ a\to b}{\Gamma\Rightarrow b};$$

$$\frac{a, \Gamma\Rightarrow c;\ b\to a}{b, \Gamma\Rightarrow c};\quad \frac{ax, \Gamma\Rightarrow bx;\ x\bar{\in}a, b, \Gamma}{\Gamma\Rightarrow\Xi ab};\quad \frac{\Gamma\Rightarrow ad;\ bd, \Delta\Rightarrow c}{\Xi ab, \Gamma, \Delta\Rightarrow c}.$$

Определения. 1) Говорят, что об a находится в нормальной форме, если нет обов вида $(\lambda xb)c$, имеющих непустые вхождения в a.

2) Запись $A_1; \ldots; A_n\vdash A$ означает, что из секвенций $A_1, \ldots, A_n$ выводима секвенция A, $n\geqslant 0$ (при $n=0$ имеем $\vdash A$ — «секвенция A доказуема»);

$$\lambda x.a \rightleftharpoons \lambda xa;\qquad \lambda x_1\ldots x_n.a\rightleftharpoons\lambda x_1(\lambda x_2\ldots x_n.a);$$

$\rightleftharpoons$ — символ равенства по определению; выражение $a\leftrightarrow b$ означает $\vdash a\to b$ и $\vdash b\to a$. Для оператора абстракции доказывается принцип ком-

* О дедуктивных расширениях логико-математических языков см ([4], [5]).

бинаторной полноты ([1–3]):

$$(\lambda x_1 \ldots x_n.a)\, b_1 \ldots b_n \leftrightarrow [b_1, \ldots, b_n / x_1, \ldots, x_n]\, a.$$

3) Теория считается комбинаторно полной, если в ней имеется оператор, удовлетворяющий принципу комбинаторной полноты; примеры комбинаторно-полных теорий: исчисления λ-конверсии, некоторые системы комбинаторной логики и их дедуктивные расширения ([1–3, 6, 7]).

4) Постулаты λ-редукции. α; β; ρ: $a \to a$; μ; ν; ξ; τ.

5) Если секвенция $a \to b$ доказуема в исчислении λ-редукции и b находится в нормальной форме, то говорят, что a имеет нормальную форму и b считается нормальной формой a.

Теорема. *Ξ-расширение λ-конверсии непротиворечиво.*

При доказательстве используем теорему Чёрча — Россера.

II. Квантор общности $\Pi \rightleftharpoons \Xi(W\Xi)$, где $W \rightleftharpoons \lambda xy.xyy$.

1) $\Gamma \Rightarrow ax \vdash \Gamma \Rightarrow \Pi a$ $(x \overline{\in} a, \Gamma)$.

2) $ab, \Gamma \Rightarrow c \vdash \Pi a, \Gamma \Rightarrow c$.

III. Квантор существования $\exists \rightleftharpoons \lambda x.\Xi(B(\Xi x)K)I$, где $I \rightleftharpoons \lambda x.x$, $K \rightleftharpoons \lambda xy.x$, $B \rightleftharpoons \lambda xyz.x(yz)$.

1) $ax, \Gamma \Rightarrow b \vdash \exists a, \Gamma \Rightarrow b$ $(x \overline{\in} a, b, \Gamma)$.

2) $\Gamma \Rightarrow ab \vdash \Gamma \Rightarrow \exists a$.

IV. Импликация $P \rightleftharpoons \lambda xy.\Xi(Kx)(Ky)$.

1) $a, \Gamma \Rightarrow b \vdash \Gamma \Rightarrow Pab$.

2) $\Gamma \Rightarrow a$; $b, \Delta \Rightarrow c \vdash Pab, \Gamma, \Delta \Rightarrow c$.

V. Конъюнкция $\& \rightleftharpoons \lambda xy.\Xi(B^2(Px)Py)I$, где $B^2 \rightleftharpoons \lambda xyzt.x(yzt)$.

1) $a, \Gamma \Rightarrow c \vdash \&ab, \Gamma \Rightarrow c$.

2) $b, \Gamma \Rightarrow c \vdash \&ab, \Gamma \Rightarrow c$.

3) $\Gamma \Rightarrow a$; $\Delta \Rightarrow b \vdash \Gamma, \Delta \Rightarrow \&ab$.

VI. Дизъюнкция $\bigvee \rightleftharpoons \lambda xy.\Xi(\Phi\&(Px)(Py))I$, $\Phi \rightleftharpoons \lambda xyzt.x(yt)(zt)$.

1) $\Gamma \Rightarrow a \vdash \Gamma \Rightarrow \bigvee ab$.

2) $\Gamma \Rightarrow b \vdash \Gamma \Rightarrow \bigvee ab$.

3) $a, \Gamma \Rightarrow c$; $b, \Delta \Rightarrow c \vdash \bigvee ab, \Gamma, \Delta \Rightarrow c$.

VII. Отрицание $\neg \rightleftharpoons \lambda x.Px(\Pi I)$.

1) $a, \Gamma \Rightarrow x \vdash \Gamma \Rightarrow \neg a$ $(x \overline{\in} a, \Gamma)$.

2) $\Gamma \Rightarrow a \vdash \neg a, \Gamma \Rightarrow b$.

3) $\vdash \neg a, a \Rightarrow b$.

4) $\vdash a \Rightarrow \neg(\neg a)$.

5) $\vdash \Rightarrow P(Pab)(P(Pa(\neg b))(\neg a))$.

6) Имеется об a такой, что $\vdash \Rightarrow a$ и секвенция $\Rightarrow \neg a$ не доказуема; например, $a \rightleftharpoons \Xi KK$.

7) Имеется об a такой, что $\vdash \Rightarrow \neg a$ и секвенция $\Rightarrow a$ не доказуема, например, $a \rightleftharpoons \Pi I$.

8) Имеется об a такой, что $\vdash \Rightarrow a$ и $\vdash \Rightarrow \neg a$; например, $a \rightleftharpoons LL$, где $L \rightleftharpoons \lambda x.P(xx)(\Pi I)$. Наличие такого «парадоксального» оба LL сближает рассматриваемое расширение λ-конверсии с некоторыми вариантами логики Фитча ([8, 9]).

9) Используя обы LL и L_aL_a, где $L_a \rightleftharpoons \lambda x.P(xx)a$ $(x \overline{\in} a)$, доказываем недопустимость правил

$$\frac{\Gamma \Rightarrow Pab;\ \Delta \Rightarrow a}{\Gamma, \Delta \Rightarrow b}; \quad \frac{\Gamma \Rightarrow a;\ a, \Delta \Rightarrow b}{\Gamma, \Delta \Rightarrow b}; \quad \frac{a, \Gamma \Rightarrow b;\ a, \Gamma \Rightarrow \neg b}{\Gamma \Rightarrow \neg a}.$$

VIII. Равенство $Q \rightleftharpoons \lambda xy.\Xi(C^1x)(C^1y)$, где $C^1 \rightleftharpoons \lambda xy.yx$.

1) $xa, \Gamma \Rightarrow xb \vdash \Gamma \Rightarrow Qab$ $(x \overline{\in} a, b, \Gamma)$.

2) $\Gamma \Rightarrow da$; $db, \Delta \Rightarrow c \vdash Qab, \Gamma, \Delta \Rightarrow c$.

3) $\vdash \Rightarrow \neg(Qab)$.

IX. Нормальное Ξ-расширение λ-конверсии. Очевидно, что одновременная доказуемость секвенций $\Rightarrow Qaa$ и $\Rightarrow \neg(Qab)$ для любых обов a и b противоречит интуитивным свойствам равенства. В целях преодоления этой трудности мы предлагаем наложить ограничения на объекты в дедуктивной части теории, потребовав, чтобы все обы Ξ-расширения имели нормальную форму. Ξ-расширение с обами, имеющими нормальную форму, назовем нормальным Ξ-расширением λ-конверсии. Для нормального Ξ-расширения: а) нетрудно проверить, что результаты I—VI, 1)—7) из VII и 1) и 2) из VIII сохраняются; б) доказуема

Теорема. *Если* $\vdash\Gamma\Rightarrow a$ *и* $\vdash a, \Delta\Rightarrow b$, *то* $\vdash\Gamma, \Delta\Rightarrow b$.

Относительно возможностей построенных расширений λ-конверсии заметим, что, во-первых, в исчислениях с принципом комбинаторной полноты представимы все частично-рекурсивные функции ([1-3]); во-вторых, комбинаторно полные исчисления находят все более широкие приложения в теории языков программирования ([3]).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
19 II 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Church, The Calculi of Lambda-conversion, Princeton, 1941. [2] H. B. Curry, R. Feys, Combinatory Logic, I, Amsterdam, 1958. [3] J. R. Hindley, B. Lercher, J. P. Seldin, Introduction of Combinatory Logic, Cambridge, 1972. [4] A. A. Markov, Rev. Intern. Phil., № 98, 477 (1971). [5] А. А. Марков, О логике конструктивной математики, М., 1972. [6] А. С. Кузичев, ДАН, 209, № 3, 541 (1973). [7] А. С. Кузичев, Комбинаторный анализ, в. 1, 105 (1971). [8] D. Prawitz, Natural Deduction, Stockholm, 1965. [9] F. B. Fitch, Essays Honor Carl G. Hempel, 1965, p. 255.