Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 6

УДК 519.44 *МАТЕМАТИКА*

Д. И. ЗАЙЦЕВ

О РАЗРЕШИМЫХ ПОДГРУППАХ ЛОКАЛЬНО РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

(Представлено академиком В. М. Глушковым 25 VI 1973)

В теории бесконечных групп уже давно сложилось направление исследований, целью которых является изучение групп по свойствам тех или иных их абелевых подгрупп. Объектом исследований здесь часто выступают локально разрешимые группы (в частности, разрешимые группы) (см., например, ([1], [2])). Вместе с этим, для локально разрешимых групп естественно расширить проблематику, поставив вопрос об изучении таких групп по свойствам их разрешимых подгрупп некоторой наперед заданной ступени разрешимости. В этом плане локально разрешимые (и разрешимые) группы исследовались в работах автора ([3], [4]), где было рассмотрено условие минимальности для разрешимых подгрупп некоторой фиксированной ступени разрешимости. Оказалось, что это условие в классе радикальных (и в частности, разрешимых) групп равносильно обычному условию минимальности. Вместе с тем интересный вопрос о равносильности указанных двух условий в классе локально разрешимых групп остался открытым.

Оказывается, он сводится к следующей задаче. Пусть G — бесконечная локально разрешимая группа и F — некоторая группа ее автоморфизмов; в каких случаях в G существует абелева F-допустимая подгруппа с теми или иными нужными нам свойствами? Один из таких практически важных случаев выделен в теореме 1 настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть F — конечная группа автоморфизмов бесконечной локально разрешимой группы G.*

Тогда в G существует бесконечная F-допустимая абелева подгруппа. Если, кроме того, G неэкстремальна, то в G существует неэкстремальная абелева F-допустимая подгруппа.

Эта теорема позволяет выделять в бесконечных локально разрешимых группах бесконечные разрешимые подгруппы. Так, например, прямым следствием теоремы 1 является следующее

Утверждение. *Если G бесконечная локально разрешимая группа и F ее конечная подгруппа, то F содержится в разрешимой подгруппе $A\cdot F$, где A — бесконечная абелева подгруппа, нормальная относительно F.*

При помощи теоремы 1 и результатов работы ([4]) получается положительное решение отмеченного выше вопроса.

Теорема 2. *Если G — локально разрешимая группа, не являющаяся разрешимой ступени меньше s, и G удовлетворяет условию минимальности для разрешимых подгрупп точно ступени s, то G экстремальна.*

Теорема 1 справедлива, разумеется, и для локально-конечной локально разрешимой группы G. Вместе с этим следует отметить, что в случае произвольной локально-конечной группы теорема, аналогичная теореме 1, уже не верна. С другой стороны, в теореме 1 нельзя отказаться от конечности группы автоморфизмов F, если даже локальную разрешимость группы G заменить более сильным ограничением (например, нильпотентностью).

Приведем набросок доказательства теоремы 1, отражающий основные моменты доказательства.

Доказательство теоремы разделяется на несколько возможных случаев.

1. Группа G является разрешимой периодической группой.

Пусть K — первый экстремальный член ряда последовательных коммутантов группы G и H — предшествующий K член этого ряда. Тогда группа H_1/K, порожденная всеми элементами простых порядков из H/K, бесконечна. Положим $B=C_{H_1}(K)$. Ввиду экстремальности K индекс $|H_1:B|$ конечен и потому B/Z, где $Z=B\cap K$, — бесконечная группа. В случае, когда множество $\pi(B)$ бесконечно, в B существует F-допустимая неэкстремальная абелева подгруппа — центр B. Пусть теперь $\pi(B)$ конечно. Тогда B/Z — абелева группа конечной экспоненты m.

Возьмем в B/Z произвольную конечную F-допустимую подгруппу B_1/Z. В централизаторе $C_B(B_1)$ существует такая бесконечная F-допустимая подгруппа C_1, что $B_1\cap C_1=Z$. Далее, берем в C_1/Z произвольную конечную F-допустимую подгруппу B_2/Z. Аналогично, что $C_{C_1}(B_2)$ существует бесконечная F-допустимая подгруппа C_2 и такая, что $B_2\cap C_2=Z$. Продолжая эти рассуждения, приходим к неограниченной последовательности F-допустимых подгрупп B_1/Z, B_2/Z, $\ldots$, B_j/Z, $\ldots$, которые порождают в B/Z прямое произведение $B_1/Z\times B_2/Z\times\ldots\times B_j/Z\times\ldots$, причем $[B_i, B_j]=1$ при $i\neq j$.

Выберем в каждом множестве $B_j\diagdown Z$ по одному элементу a_j и рассмотрим множество всех коммутаторов $[a_j^x, a_j^y]$, где x, y — произвольная пара элементов из F. Каждый такой коммутатор принадлежит Z и его порядок делит m. Следовательно, ввиду экстремальности Z множество всех таких коммутаторов конечно. Так как индекс j принимает бесконечное множество значений, то найдется бесконечная последовательность натуральных чисел, для любых двух чисел i, j которой выполняется соотношение $[a_i^x, a_i^y]=[a_j^x, a_j^y]=Z_{x,y}$, какова бы ни была пара $x, y\in F$. Чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что это соотношение выполнено для любых натуральных чисел i, j. Положив $b_j=a_{(j-1)m+1}\cdot a_{(j-1)m+2}\cdot\ldots\cdot a_{jm}$, покажем, что все b_j, $j=1, 2, \ldots$, порождают абелеву F-допустимую подгруппу. Действительно, если x, y — произвольная пара элементов из F, то $[b_i^x, b_j^y]=1$, так как $[B_i, B_j]=1$ при $i\neq j$ и $[b_j^x, b_j^y]=\prod\limits^{m}[a^{x}_{(j-1)m+k}, a^{y}_{(j-1)m+k}]=z^m_{x,y}=1$ при $i=j$. Кроме того, из построения элементов b_j видно, что все они порождают неэкстремальную подгруппу. Первый случай рассмотрен полностью.

2. Группа G является локально разрешимой периодической группой.

Предположим, что любая F-допустимая абелева подгруппа из G экстремальна. Наша цель — доказать, что группа G экстремальна. Понятно, что, не нарушая общности, можно считать группу G счетной.

Покажем сначала, что G обладает отличной от единицы конечной абелевой нормальной подгруппой, допустимой относительно F. Так как G счетная, то она является объединением возрастающей последовательности своих конечных F-допустимых подгрупп G_j: $G_1<G_2<\ldots<G_j<\ldots$, $\bigcup\limits_j G_j=G$. Пусть A_j — некоторая отличная от единицы F-допустимая абелева нормальная подгруппа из G_j, имеющая наименьший возможный порядок. Подгруппа A_j — элементарная абелева p_j-подгруппа по некоторому простому p_j. Первый шаг состоит в доказательстве того, что множество p_j-х конечно. В случае, когда ранги $r(A_j)$ ограничены в совокупности, этот факт вытекает из известной теоремы Цассенхауза о разрешимости локально разрешимой группы матриц и из утверждения, установленного в п. 1.

Предположим теперь, что ранги $r(A_j)$ неограничены в совокупности. Проведем следующее рассуждение. Возьмем такое A_k, чтобы $r(A_k)\geqslant|F|+1$ и в каждом A_j с $j>k$ выберем некоторую минимальную A_k-инвариантную подгруппу N_j. Тогда $|A_k: C_{A_k}(N_j)|\leqslant p_k$ и поэтому, ввиду предположения о $r(A_k)$, пересечение всех $(C_{A_k}(N_j))^x$, $x\in F$, отлично от единицы. Следовательно, каждое N_j поэлементно перестановочно с некоторой отличной от единицы F-допустимой подгруппой C_j из A_k. Поэтому можно найти такую бесконечную последовательность номеров $k<j_1<j_2<\ldots$, что $C_{j_1}=C_{j_2}=\ldots$. Тем самым доказано, что в A_k существует отличная от единицы F-допустимая подгруппа $\tilde{A}_k=C_{j_1}=C_{j_2}=\ldots$, для которой $C_{A_{j_s}}(\tilde{A}_k)\neq 1$ при всех $s=1, 2, \ldots$ Положим $B_{j_s}=C_{A_{j_s}}(\tilde{A}_k)$. Эти подгруппы F-допустимы и нормализатор каждой из них содержит все предыдущие подгруппы. Следовательно, последовательность B_{j_s}-х обладает теми же свойствами, что и исходная последовательность A_j-х. Ранги $r(B_{j_s})$ неограничены в совокупности — это показывается так же, как и неограниченность рангов $r(A_j)$.

Проделав аналогичное рассуждение для последовательности B_{j_s}-х, установим существование такой подгруппы B_l, что в B_l существует отличная от единицы F-допустимая подгруппа $\tilde{A}_l$, централизаторы которой отличны от единицы в бесконечном множестве членов последовательности B_{j_s}-х. Эти рассуждения можно продолжать неограниченно и тем самым установить существование F-допустимой абелевой неэкстремальной подгруппы $\tilde{A}_k\times\tilde{A}_l\times\tilde{A}_m\times\ldots$, что приводит к противоречию с предположением. Итак, множество p_j-х конечно. В этом случае из A_j-х можно выбрать такую бесконечную последовательность, что все A_j-е, в нее входящие, являются p-группами по одному и тому же p. Чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что все A_j составляют такую последовательность.

Обозначим через C_j нижний слой центра конечной p-группы $A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_j$. Так как $A_j\triangleleft A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_j$, то $C_j\cap A_j\neq 1$. Подгруппа $C=C_1\cdot C_2\cdot\ldots\cdot C_j\cdot\ldots$ F-допустима и является элементарной абелевой p-группой. Следовательно, C — конечная подгруппа, а ввиду того, что $C_j\cap A_j\leqslant C$, можно выделить такую бесконечную последовательность натуральных чисел $n_1<n_2<\ldots<n_s<\ldots$, что $C_{n_s}\cap A_{n_s}=C_{n_t}\cap A_{n_t}$, при любых s, t. Отсюда $A_{n_s}\cap A_{n_t}\neq 1$, а поэтому при $n_s<n_t$ в силу выбора A_j имеет место соотношение $A_{n_s}\leqslant A_{n_t}$. Это доказывает, что $\bigcup_s A_{n_s}$ есть элементарная абелева F-допустимая подгруппа. Она по предположению конечна и поэтому $A_{n_k}=\bigcup_s A_{n_s}$ при некотором k, откуда $A_{n_k}\triangleleft G$. Таким образом, доказано существование в G конечной абелевой нормальной F-допустимой подгруппы.

Пусть теперь $1=N_0<N_1<\ldots N_\alpha<\ldots N_\gamma$ — некоторый (возможно трансфинитный) ряд нормальных F-допустимых подгрупп группы G с конечными абелевыми факторами и N_γ такое, что G/N_γ уже не содержит отличных от единицы конечных нормальных подгрупп. Покажем, что подгруппа N_γ экстремальна. Предположим, что N_γ неэкстремальна и N_β — первый неэкстремальный член ряда N_α-х. Пусть R — максимальная подгруппа из N_β, не содержащая истинных подгрупп конечного индекса. Нетрудно видеть, что R — абелева экстремальная группа. Ряд N_α-х индуцирует в $N_\gamma/R=\overline{N}_\gamma$ бесконечный ряд вида $\overline{1}=\overline{M}_0<\overline{M}_1<\ldots<\overline{M}_j<\ldots\overline{M}_\omega=\overline{N}_\gamma$ с конечными членами. Пусть $\overline{Z}$ — центр $\overline{N}_\gamma$, он конечен, как это можно вывести из п. 1. Возьмем в $\overline{N}_\gamma/\overline{Z}$ некоторую конечную абелеву нормальную F-допустимую подгруппу $\overline{K}_1/\overline{Z}$. Такая подгруппа существует ввиду наличия ряда $\overline{M}_j$-х. Для $\overline{K}_1$ находим номер j_1, для которого $\overline{K}_1\cap C_{\overline{N}_\gamma}(\overline{M}_{j_1})=\overline{Z}$. Далее, в $C_{\overline{N}_\gamma}(\overline{M}_{j_1})/\overline{Z}$ берем абелеву F-допустимую подгруппу $\overline{K}_2/\overline{Z}$, нормальную в $\overline{N}_\gamma/\overline{Z}$, и такое j_2, чтобы $\overline{K}_1\overline{K}_2\cap C_{\overline{N}_\gamma}(\overline{M}_{j_2})=\overline{Z}$. Продолжая подобные рассуждения, можно обнаружить последовательность подгрупп $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2, \ldots, \overline{K}_l, \ldots$, образы которых в $\overline{N}_\gamma/\overline{Z}$ порождают прямое произведение $\overline{K}/\overline{Z}=\overline{K}_1/\overline{Z}\times\overline{K}_2/\overline{Z}\times\ldots\times\overline{K}_l/\overline{Z}\times\ldots$ Подгруппа K разрешима, F-допустима и неэкстремальна. Применяя п. 1, приходим к противоречию. Тем самым установлено, что N_γ — экстремальная подгруппа и потому N_γ разрешима. Из п. 1 вытекает, что G/N_γ абелевы F-допустимые подгруппы экстремальны, но тогда, как это доказано в первой половине этого пункта, при $G\neq N_\gamma$ G/N_γ обладает отличной от единицы абелевой нормальной конечной F-допустимой подгруппой. Таким образом, получается противоречие с выбором подгруппы N_γ. Следовательно, должно быть $G=N_\gamma$, т. е. группа G экстремальна.

3. Пусть теперь G — произвольная локально разрешимая группа с экстремальными абелевыми F-допустимыми подгруппами. Учитывая п. 2, нужно доказать только, что G — периодическая группа. Если G непериодическая и g — некоторый ее элемент бесконечного порядка, то g содержится в конечно-порожденной (и следовательно, разрешимой) F-допустимой подгруппе H. Не нарушая общности, можно считать, что коммутант H' периодический. Ввиду п. 1 H' — экстремальная подгруппа, а так как H конечно порождена, то H' конечен (см. лемму 4 из ([4])). Поэтому H — полициклическая группа. Теперь из известного свойства полициклических групп выводим, что H содержит характеристическую абелеву подгруппу конечного индекса. Эта подгруппа F-допустима и неэкстремальна. На этом доказательство теоремы заканчивается.

Институт математики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
11 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Черников, Матем. сборн., 28, 119 (1951). [2] А. И. Мальцев, Матем. сборн., 28, 567 (1951). [3] Д. И. Зайцев, ДАН, 176, № 3, 509 (1967). [4] Д. И. Зайцев, Изв. АН СССР, сер. матем., 33, 765 (1969).