Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 6

УДК 517.514 *МАТЕМАТИКА*

М. А. ЛЕЙЗИН

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком С. М. Никольским 26 II 1973)

Ряд задач математической физики приводит к рассмотрению дифференциальных операторов с особенностью на граничном многообразии. Одним из таких операторов является изучаемый в настоящей работе оператор Бесселя $B_k=\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{k}{y}\dfrac{\partial}{\partial y}$, $k>0$, с особенностью при $y=0$. Построенная для таких операторов шкала гильбертовых пространств изучалась в работе [1] методом преобразования Фурье — Бесселя; там же были доказаны соответствующие теоремы вложения. Для дифференциальных операторов, в состав которых входит оператор Бесселя, автором были установлены некоторые теоремы вложения в полупространстве E_{n+1}^+ $x_{n+1}=y>0$ эвклидова $(n+1)$-мерного пространства точек $x=(x', y)$, где $x'=(x_1, \ldots, x_n)\in E_n$. Были установлены также соответствующие прямая и обратная теоремы вложения на гиперплоскость $y=0$.

В настоящей работе строятся весовые классы, являющиеся областью определения некоторого оператора вложения, и изучаются следы функций данных классов на E_{m+1}^+-гиперплоскости $\tilde{x}=0$, $\tilde{x}=(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, $m<n$, полупространства E_{n+1}^+. Показано, что следы эти характеризуются в терминах классов, аналогичных известным классам О. В. Бесова [2]. В частности, показана ограниченность оператора сужения функций на гиперплоскость $\tilde{x}=0$. Изучается также оператор подъема с такой гиперплоскости и вопросы эквивалентности различных нормировок пространства следов.

Пусть $C_0^{(l)}(\overline{E_{n+1}^+})$, $l=(l', l_{n+1})$, $l'=(l_1, \ldots, l_n)$, обозначает множество функций $f(x, y)$ с компактными носителями в $\overline{E_{n+1}^+}$, имеющих l' непрерывных производных по переменной x', $2l_{n+1}$ производных по переменной y и таких, что функция $B_y^{l_{n+1}}f(x, y)$ непрерывна в $\overline{E_{n+1}^+}$. На гиперплоскости $\tilde{x}=0$ полупространства $\overline{E_{n+1}^+}$ рассмотрим множество ${}^+C_0^\infty(\overline{E_{m+1}^+})$ бесконечно дифференцируемых, четных по y функций с компактными носителями, содержащимися в $\overline{E_{m+1}^+}$.

Положим $D_{x'}^{l'}=D_{x_1}^{l_1}\ldots D_{x_n}^{l_n}$. Обозначим через $L_{p,k}(E_{n+1}^+)$ пространство функций, определенных на $\overline{E_{n+1}^+}$, для которых

$$\|f\|_{L_{p,k}(E_{n+1}^+)}\overset{\mathrm{def}}{=}\left(\int\limits_{E_n}dx\int\limits_0^\infty|f(x, y)|^p y^k\,dy\right)^{1/p}<\infty,$$

где k — положительное число, участвующее в определении оператора Бесселя.

На множестве функций $C_0^{(l)}(\overline{E_{n+1}^+})$ введем следующие нормы:

$$\|f\|_{w_{p,k}^l(E_{n+1}^+)}=\sum_{i=1}^{n}\|D_{x_i}^{l_i}f(x,y)\|_{L_{p,k}(E_{n+1}^+)}+\|B_y^{\cdot}f(x,y)\|_{L_{p,k}(E_{n+1}^+)},$$

$$\|f\|_{W_{p,k}^l(E_{n+1}^+)}=\|f\|_{L_{p,k}(E_{n+1}^+)}+\|f\|_{w_{p,k}^l(E_{n+1}^+)}. \tag{1}$$

Пусть число $m>0$, причем $m=\overline{m}+\alpha$, где $\overline{m}$ — наибольшее целое число, меньшее m, а $\Delta_i^s(h)$ обозначает s-ю разделенную разность шага h по переменной x_i, $i=1, 2, \ldots, m, n+1$.

Положим для функций $\varphi(x, y)\in{}^+C_0^{00}(\overline{E_{m+1}^+})$

$$[\varphi(x, y)]_{l_iLp,\,k(E_{m+1}^+)}=\left(\int\limits_{E_{m+1}^+}y^k\,dx\,dy\int\limits_0^\infty\frac{|\Delta_i^2(h)\,D_{x_i}^{\overline{l}_i}\varphi(x, y)|^p}{h^{1+p(l_i-\overline{l}_i)}}\,dh\right)^{1/p}$$

при $i=1, \ldots, m$. Обозначим $l_0=l_{n+1}/2$ и положим, далее,

$$[\varphi(x,y)]_{l_{n+1},L_{p,k}(E_{m+1}^+)}=\left(\int\limits_{E_{m+1}^+}y^k\,dx\,dy\int\limits_0^\infty\frac{|(T_y^h-I)B_y^{\overline{l}_0}\varphi(x,y)|^p}{h^{1+p\lambda}}\,dh\right)^{1/p}$$

при $0<\lambda<2$, где $\lambda=l_{n+1}-2\overline{l}_0$. Если же $\lambda=2$, то положим

$$[\varphi(x,y)]_{l_{n+1},L_{p,k}(E_{m+1}^+)}=$$

$$=\left(\int\limits_{E_{m+1}^+}y^k\,dx\,dy\int\limits_0^\infty\frac{|(T_y^{3h}-3T_y^{2h}+3T_y^h-I)B_y^{\overline{l}_0}\varphi(x,y)|^p}{h^{1+2p}}\,dh\right)^{1/p}.$$

Выше через T_y^h обозначен так называемый оператор обобщенного сдвига (см. [3]), определяемый формулой

$$T_y^h\psi(y)=C_k\int\limits_0^\pi\psi(\sqrt{y^2-2yh\cos\alpha+h^2})\sin^{k-1}\alpha\,d\alpha.$$

Введем нормы

$$\|\varphi\|_{b_{p,k}^l(E_{m+1}^+)}=\sum_{i=1}^{m}[\varphi(x,y)]_{l_i,L_{p,k}(E_{m+1}^+)}+[\varphi(x,y)]_{l_{n+1},L_{p,k}(E_{m+1}^+)}.$$

$$\|\varphi\|_{B_{p,k}^l(E_{m+1}^+)}=\|\varphi\|_{L_{p,k}(E_{m+1}^+)}+\|\varphi\|_{b_{p,k}^l(E_{m+1}^+)}. \tag{2}$$

Пространство $W_{p,\,k}^l(E_{n+1}^+)$ определяется как замыкание $C_0^{(l)}(\overline{E_{n+1}^+})$ по норме (1), а $B_{p,\,k}^l(E_{m+1}^+)$ как замыкание ${}^+C_0^\infty(\overline{E_{m+1}^+})$ по норме (2).

Определим полунормы

$$[\varphi(x, y)]_{l_{n+1}}^{(1)}=\left(\int\limits_0^\infty\frac{\|(T_y^h-I)\,B_y^{\overline{l}_0}\varphi(x, y)\|_{L_{p,\,k}(E_{m+1}^+)}^p}{h^{1+p\lambda}}\,dh\right)^{1/p},\quad 0<\lambda<1, \tag{3}$$

$$[\varphi(x, y)]_{l_{n+1}}^{(2)}=\left(\int\limits_0^\infty\frac{\|(T_y^{2h}-2T_y^h+I)\,B_y^{\overline{l}_0}\varphi(x, y)\|_{L_{p,\,k}(E_{m+1}^+)}^p}{h^{1+p}}\,dh\right)^{1/p},\quad \lambda=1, \tag{4}$$

$$[\varphi(x,y)]^{(3)}_{l_{n+1}}=\left(\int\limits_0^\infty \frac{\left\|\frac{\partial}{\partial n}T^h_y B^{\bar l_0}_y\varphi(x,\ y)\right\|^p_{L_{p,\,k}(E^+_{m+1})}}{h^{1+p(\lambda-1)}}\,dh\right)^{1/p},\quad 1<\lambda<2, \tag{5}$$

для $1<p<\infty$ и для $p=\infty$

$$[\varphi(x,y)]^{(1)}_{l_{n+1}}=\sup_{x,y,h}\frac{|(T^h_y-I)B^{\bar l_0}_y\,\varphi(x,y)|}{h^\lambda},\quad 0<\lambda<1, \tag{6}$$

$$[\varphi(x,y)]^{(2)}_{l_{n+1}}=\sup_{x,y,h}\frac{|(T^{2h}_y-2T^h_y+I)B^{\bar l_0}_y\,\varphi(x,y)|}{h},\quad \lambda=1, \tag{7}$$

$$[\varphi(x,y)]^{(1)}_{l_{n+1}}=\sup_{x,y,h}\frac{\left|\frac{\partial}{\partial h}T^h_y B^{\bar l_0}_y\,\varphi(x,y)\right|}{h^{\lambda-1}},\quad 1<\lambda<2. \tag{8}$$

Отметим, что в случае $l_1=\ldots=l_m=l_{n+1}$ следы функций на $\overline{E^+_{m+1}}$ характеризовались в терминах полунорм (3)—(5) в работе ([4]).

Рассмотрим теперь каждую из формул (3)—(8) для всех $0<\lambda<2$. Имеет место.

Теорема 1. *Для каждого $1<p\leqslant\infty$ полунормы* (3)—(8) *эквивалентны для всех* $0<\lambda<2$.

При доказательстве этой теоремы используется простая, но полезная формула

$$\frac{\partial}{\partial h}T^h_y\psi(y)=\frac{1}{h^k}\int\limits_0^h\sigma^k T^\sigma_y B_y\psi(y)\,d\sigma,$$

справедливая для всех достаточно гладких функций $\psi(y)$, а также обобщенное неравенство Минковского и неравенство Харди ([5]).

Обозначим через $Af=D^{\nu'}_x B^{\nu_{n+1}}_y f(x,\ y)\,|_{\tilde x=0}$ оператор сужения функций $D^{\nu'}_x B^{\nu_{n+1}}_y f(x,\ y)$ на гиперплоскость $\tilde x=0$ (определение следа см. в работе ([4])).

Теорема 2. *Пусть функция* $f(x,y)\in W^{\,l}_{p,k}(E^+_{n+1})$, $k\neq 1, 3, \ldots, 2l_{n+1}-1$. *Пусть $l_i>0$, $\nu_i\geqslant 0$ — целые числа такие, что*

$$\sigma_1=1-\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\nu_i}{l_i}-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{l_i}+\frac{k+1}{2l_{n+1}}\right)-\frac{1}{q}\sum_{i=m+1}^{n}\frac{1}{l_i}>0.$$

Тогда для любого $h>0$ оператор A как оператор из $W^{\,l}_{p,k}(E^+_{n+1})$ в $B^{\,r}_{q,k}(E^+_{m+1})$, $1<p\leqslant q\leqslant\infty$, ограничен, причем

$$[Af]_{r_iL_{q,k}(E^+_{m+1})}\leqslant C\left(h^{\sigma_1-r_i/l_i-1}\|f\|_{L_{p,k}(E_{n+1})}+h^{\sigma_1-r_i/l_i}\|f\|_{w^{\,l}_{p,k}(E^+_{n+1})}\right)$$

при $i=1, 2, \ldots, m$ и

$$[Af]_{r_{n+1}L_{q,k}(E^+_{m+1})}\leqslant C\left(h^{\sigma_1-r_{n+1}/2l_{n+1}-1}\|f\|_{L_{p,k}(E^+_{n+1})}+h^{\sigma_1-r_{n+1}/2l_{n+1}}\|f\|_{w^{\,l}_{p,k}(E^+_{n+1})}\right),$$

где $0<r_i\leqslant\sigma_1 l_i$, $i=1, \ldots, m$, $0<r_{n+1}\leqslant 2\sigma_1 l_{n+1}$.

При тех же условиях оператор A ограничен как оператор из $W^{l}_{p,k}(E^{+}_{n+1})$ *в* $L_{q,k}(E^{+}_{m+1})$, *т. е.*

$$\|Af\|_{L_{q,k}(E_{m+1})} \leqslant C\left(h^{\sigma_1-1}\|f\|_{L_{p,k}(E_{n+1})} + h^{\sigma_1}\|f\|_{\overset{l}{w}_{p,k}(E_{n+1})}\right).$$

Для доказательства теоремы 2 строилось интегральное представление для оператора $D^{\nu'}_{x}\quad B^{\nu n^+}_{y}$ типа представления работы ([6]), но приспособленное к нашему случаю. Далее доказательство проводилось по схеме работы ([7]), для чего были доказаны аналоги интегральных неравенств работы ([7]) в случае весовых пространств.

Построенное интегральное представление удается использовать при доказательстве теоремы, обратной теореме 2.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi(x, y) \in b^{r}_{p,k}(E^{+}_{n})$, $k \neq 1, 3, \ldots, 2\bar{r}_0 - 1$; r_{n+1} *не является четным числом,* $1 < p < \infty$, $r_i = \sigma_2 l_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, $r_{n+1} = 2\sigma_2 l_{n+1}$, *где*

$$\sigma_2 = 1 - \frac{\nu}{l_n} - \frac{1}{pl_n} > 0.$$

Тогда существует ограниченный оператор продолжения $f(x, y) = A_1\varphi$ *как оператор из* $b^{r}_{p,k}(E^{+}_{n})$ *в* $w^{l}_{p,k}(E^{+}_{n+1})$ *такой, что*

$$D^{\nu}_{x_n} f(x, y)\,|_{x_n=0} = \varphi(x, y),$$

где след понимается в смысле работы ([1]).

При этом верно соответствующее неравенство между нормами

$$\|A_1\varphi\|_{w^{l}_{p,k}(E^{+}_{n+1})} \leqslant C\|\varphi\|_{b^{r}_{p,k}(E^{+}_{n})}.$$

Воронежский государственный педагогический институт

Поступило 18 XII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. А. Киприянов, Тр. Матем. инст. АН СССР им. В. А. Стеклова, 89 (1967). [2] О. В. Бесов, там же, 60 (1961). [3] Б. М. Левитан, УМН, 6, в. 2 (42) (1951). [4] И. А. Киприянов, М. И. Ключанцев, Тр. матем. фак. Воронежск. гос. унив., Тр. семинара по функциональному анализу (сборн. статей по функциональным пространствам и операторным уравнениям), Воронеж, 1970. [5] Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа, Неравенства, ИЛ, 1948. [6] В. П. Ильин, Сибирск. матем. журн., 8, № 3 (1967). [7] В. П. Ильин, В. А. Солонников, Тр. матем. Инст. АН СССР им. В. А. Стеклова, 66 (1962).