Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 6

УДК 517.432.1

МАТЕМАТИКА

М. В. КАРАСЕВ

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОТ НЕКОММУТИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 21 VI 1973)

В настоящей работе получены формулы теории возмущений в случае, когда совместный спектр (1) $\sigma(\overset{2}{C}|\overset{1}{B},\overset{3}{B})$ невозмущенного оператора B и возмущающего оператора C лежит на диагонали. Основным аппаратом служит развитое В. П. Масловым (1) исчисление упорядоченных по Фейнману (2) операторов.

В отличие от (1) нам будет полезно рассмотреть исчисление упорядоченных операторов в банаховых шкалах; при этом используются иные, нежели в (1), пространства символов и классы операторов.

Пусть $C_\tau^\infty(R^n)$ — счетно-нормированное пространство гладких функций с набором норм

$$\|\varphi\|_s^{(\tau)}=\sum_{|\alpha|=0}^{s}\sup_{x\in R^n}\left\{(1+|x|^2)^{-\tau/2}\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\varphi(x)\right|\right\},\quad s=0,1,2,\ldots$$

Обозначим через $C^\infty(R^n)$ объединение $\bigcup\limits_{\tau=0}^{\infty}C_\tau^\infty(R^n)$. Это топологическая алгебра (топология согласована с имеющейся в C^∞ сходимостью, см. (3), стр. 89).

Далее, пусть $\{B_\tau\}$ — банахова шкала ($B_\tau\subset B_{\tau'}$ при $\tau\leqslant\tau'$), параметризованная индексом $\tau\in R$ (или $\tau\in Z$). Определим алгебру H^∞ ограниченных в $\{B_\tau\}$ операторов: $H^\infty=\bigcap\limits_\tau(\bigcup\limits_p\operatorname{Hom}(B_p,B_\tau))$. Последовательность $\{A_n\}$ назовем сходящейся к A в H^∞, если для всех τ существует $p(\tau)$ такое, что $\{A_n\}$ сходится к A в $\operatorname{Hom}(B_{p(\tau)},B_\tau)$. Существует топология, согласованная с этой сходимостью и превращающая H^∞ в топологическую алгебру. Если $\|A\|_{B_{p(\tau)}\to B_\tau}\leqslant C(\tau)$ для всех τ, то функция $C(\tau)$ называется оценкой A в H^∞ для шага $p(\tau)$. Пусть семейство $\{A_\alpha\}\subset H^\infty$, тогда если шаг и соответствующая оценка A_α в H^∞ не зависят от α, то оператор A_α называется ограниченным в H^∞ равномерно по α.

Определим, следуя (1), производящие операторы в шкале $\{B_\tau\}$.

Определение. Пусть в H^∞ задана дифференцируемая однопараметрическая мультипликативная группа e_t, $t\in R$, имеющая в H^∞ оценку $C(\tau)(1+|t|)^{s(\tau)}$ для шага $p(\tau)$ при некотором $s(\tau)\geqslant0$. Тогда оператор $A=i\,de_t/dt|_{t=0}$ называется **производящим в шкале** $\{B_\tau\}$ **для группы** $e_t\equiv e_t(A)$ (здесь $i^2=-1$). Обозначим через $\mathscr{A}$ класс всех производящих в $\{B_\tau\}$ операторов. Если $A_\alpha\in\mathscr{A}$, причем группа $e_t(A_\alpha)$ ограничена в H^∞ равномерно по α, то оператор A_α называется **производящим равномерно по** α.

Лемма 1. *Для любого $A\in\mathscr{A}$ существует единственный непрерывный гомоморфизм M_A: $C^\infty(R)\to H^\infty$ такой, что $M_A(e^{-ixt})=e_t(A)$ и $M_A(x)=A$.*

Обозначение: $f(A)\equiv M_A(f)$.

Некоторые свойства производящих операторов в банаховой шкале приведены в трех следующих предложениях.

Предложение 1. *Если $A\in\mathscr{A}$, $f\in C^\infty(R)$, то*

$$f(\operatorname{Sp}A)\subset\operatorname{Sp}f(A)\subset\overline{f(\sigma(A))},$$

где Sp *обозначает спектр элементов в алгебре* H^∞, $\sigma(A)$ — *носитель* M_A.

Следствие. *Спектр группы* $\mathrm{Sp}\,(e_t(A))$ *лежит на единичной окружности.*

Предложение 2. *Пусть* $A\in H^\infty$. *Тогда* $A\in\mathcal{A}$, *если и только если* $\mathrm{Sp}\,A\subset R$ *и при* $\mathrm{Im}\,\lambda\neq 0$, $k=1, 2, \ldots$, *оператор* $(\lambda-A)^{-k}$ *имеет в* H^∞ *для шага* $p(\tau)$ *оценку*

$$\frac{C_1(\tau)}{(k-1)!}\sum_{j=0}^{s(\tau)}\frac{(k+j-1)!}{|\mathrm{Im}\,\lambda|^{k+j}}$$

(*где* $p(\tau)$, $s(\tau)$ *см. в определении*).

Предложение 3. *Пусть операторы* A_n — *равномерно производящие относительно* n *и последовательность* $\{A_n\}$ *сходится в* H^∞ *к оператору* A. *Тогда* $A\in\mathcal{A}$.

Теперь определим функции от упорядоченных операторов в банаховой шкале. Пусть $A_1, \ldots, A_n\in\mathcal{A}$; $T_1, \ldots, T_n\in H^\infty$. Аналогично (1) доказывается, что существует единственное линейное непрерывное отображение $M_{T,A}$: $C^\infty(R^n)\to H^\infty$ такое, что для функции $f(x_1, \ldots, x_n)=f_1(x_1)\cdot\ldots\cdot f_n(x_n)$, где $f_1, \ldots, f_n\in C^\infty(R)$, справедливо равенство $M_{T,A}(f)=T_nf_n(A_n)\ldots T_1f_1(A_1)$. Поэтому естественным является следующее обозначение (1):

$$M_{T,A}(f)\equiv \overset{2}{T_1}\ldots \overset{2n}{T_n}f(\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{2n-1}{A_n}).$$

Функция f называется символом этого оператора, а носитель $M_{T,A}$ называется спектром $\sigma(\overset{2}{T_1}, \ldots, \overset{2n}{T_n}|\overset{1}{A_1}, \ldots, \overset{2n-1}{A_n})$.

Наша основная задача: разложение оператора $f(B+\varepsilon C)$ в случае, когда спектр $\sigma(\overset{2}{C}|\overset{1}{B}, \overset{3}{B})$ лежит на диагонали в R^2 (или, что то же, некоторый коммутатор $\overset{2}{C}(\overset{1}{B}-\overset{3}{B})^k$ равен нулю).

Пусть $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_k)$, $\beta_j=0, 1, 2, \ldots$; для операторов T, $R\in H^\infty$ обозначим $[T, R]^{(\beta)}\equiv\overset{2k}{T}(\overset{2k-1}{R}-\overset{2k+1}{R})^{\beta_k}\ldots\overset{2}{T}(\overset{1}{R}-\overset{3}{R})^{\beta_1}$, где $\overset{2}{T}(\overset{1}{R}-\overset{3}{R})^0\equiv T$. Кроме того, пусть $D_1(\beta)=1$, $D_k(\beta)=C^{\beta_1+1}_{\beta_1+\beta_2+1}\ldots C^{\beta_1+\ldots+\beta_{k-1}+k-1}_{|\beta|+k-1}$ при $k\geqslant 2$, где $C_n^l\equiv\dfrac{n!}{l!(n-l)!}$. Фиксируем любое натуральное m; символ $f\in C^\infty(R)$.

Теорема 1. *Пусть* $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ *и оператор* $B_\varepsilon+C_\varepsilon$ — *производящий равномерно по* ε, *а операторы* $\varepsilon^{-1}C_\varepsilon$, B_ε *ограничены в* H^∞ *равномерно по* ε *. *Кроме того, пусть* $\overset{2}{C_\varepsilon}(\overset{1}{B_\varepsilon}-\overset{3}{B_\varepsilon})^{r+1}=0$ *для некоторого* $r\geqslant 0$. *Тогда*

$$f(B_\varepsilon+C_\varepsilon)=f(B_\varepsilon)+\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{\substack{\beta_j=0\\ j=1,\ldots,k}}^{r}\frac{D_k(\beta)}{(k+|\beta|)!}f^{(k+|\beta|)}(\overset{2}{B_\varepsilon})\overline{\overset{1}{[C_\varepsilon, B_\varepsilon]^{(\beta)}}}+\varepsilon^mR_m(f),$$

где остаток R_m: $C^\infty(R)\to H^\infty$ *ограничен равномерно по* ε.

Справедливо также более общее разложение — по коммутаторам.

Теорема 2. *Пусть в условиях теоремы 1 операторы* B_ε, C_ε — *производящие равномерно по* ε *и* $[[C_\varepsilon, B_\varepsilon], B_\varepsilon]=0$. *Тогда*

$$f(B_\varepsilon+C_\varepsilon)=$$

$$=f(\overset{2}{B_\varepsilon}+\overset{1}{C_\varepsilon})+\sum_{s=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{s}\sum_{\substack{|\beta|=s\\ \beta_j\geqslant 1\\ j=1,\ldots,k}}\frac{(-1)^sD_k(\beta)}{(k+s)!}\overline{[B_\varepsilon, C_\varepsilon]^{(\beta)}}f^{(k+s)}(\overset{3}{B_\varepsilon}+\overset{1}{C_\varepsilon})+\varepsilon^mR_m'(f),$$

где остаток R_m': $C^\infty(R)\to H^\infty$ *ограничен равномерно по* ε.

---

* Например, $C_\varepsilon\equiv\varepsilon C$, $B_\varepsilon\equiv B$.

Д о к а з а т е л ь с т в о этих теорем получим, используя некоторые тождества для функций от упорядоченных операторов. Ниже $A, B \in \mathscr{A}$, $f \in C^\infty(R)$.

Определим k-ю разностную производную $\delta^k f$ как функцию на R^{k+1}:

$$\delta^k f(x_1, \dots, x_{k+1}) = \sum_{j=1}^{k+1} \Big(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k+1} (x_j - x_i)^{-1} \Big) f(x_j).$$

Отображение $f \to \delta^k f$ непрерывно из $C^\infty(R)$ в $C^\infty(R^{k+1})$.

Л е м м а 2 (формула Тейлора).

$$f(A) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} (\overset{2}{A} - \overset{1}{B})^k f^{(k)}(\overset{1}{B}) + (\overset{2}{A} - \overset{1}{B})^m \delta^m f(\overset{1}{B}, \dots, \overset{1}{B}, \overset{2}{A}). \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из тождества для символов

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} (x-y)^k f^{(k)}(y) + (x-y)^m \delta^m f(y, \dots, y, x) \tag{2}$$

после замены $x \to \overset{2}{A}$, $y \to \overset{1}{B}$ получим искомое равенство.

Л е м м а 3 (формула Ньютона).

$$f(A) = f(B) + \sum_{k=1}^{m-1} \overline{(A-B)}^{\,2} \dots \overline{(A-B)}^{\,2k} \delta^k f(\overset{1}{B}, \dots, \overset{2k+1}{B}) +$$

$$+ \overline{(A-B)}^{\,2} \dots \overline{(A-B)}^{\,2m} \delta^m f(\overset{1}{B}, \dots, \overset{2m-1}{B}, \overset{2m+1}{A}). \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (1) при $m=1$ имеем $f(A) = f(B) + \overline{(A-B)}^{\,2} \delta f(\overset{3}{A}, \overset{1}{B})$. Рекуррентно применяя эту формулу, получим (3).

Л е м м а 4. *Пусть $P \in H^\infty$. Тогда имеет место формула коммутации*

$$[P, f(A)] = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} (\overset{1}{A} - \overset{3}{A})^k \overset{2}{P} f^{(k)}(\overset{3}{A}) + \overset{2}{P} (\overset{1}{A} - \overset{3}{A})^m \delta^m f(\overset{3}{A}, \dots, \overset{3}{A}, \overset{1}{A}); \tag{4}$$

в частности,

$$[P, f(A)] = \overline{[P, A]}^{\,2} \delta f(\overset{1}{A}, \overset{3}{A}). \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2) заменой $x \to \overset{1}{A}$, $y \to \overset{3}{A}$ получим (4).

Заметим, что остаточный член в (4) равен нулю, если некоторая производная $f^{(k)}(x)$, $k \leqslant m-1$, равна нулю в окрестности выпуклой оболочки спектра $\sigma(A)$.

Теперь получим а н а л о г т е о р е м ы о с л о ж н о й ф у н к ц и и. Пусть $f \in C^\infty(R)$, $g \in C^\infty(R^2)$ и сложная функция $f(g(x_1, x_2)) \in C^\infty(R^2)$. Предположим, что $\hat{g} \equiv g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B}) \in \mathscr{A}$. Из тождества для символов $f(z) = f(g(x_1, x_2)) + (z - g(x_1, x_2)) \cdot \delta f(g(x_1, x_2); z)$ после замены $z \to \overset{2}{\hat{g}}$, $x_1 \to \overset{1}{A}$, $x_2 \to \overset{3}{B}$ получим

$$(\hat{g}) = f(g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})) + (\overset{2}{\hat{g}} - g(\overset{1}{A}, \overset{3}{B})) \delta f(g(\overset{1}{A}, \overset{3}{B}), \overset{2}{\hat{g}}).$$

Пользуясь (5), преобразуем последнее слагаемое:

$$f(\hat{g}) = f(g(\overset{1}{A}, \overset{2}{B})) + \overset{2}{\hat{g}} \delta f(g(\overset{1}{A}, \overset{3}{B}), \overset{2}{\hat{g}}) - g(\overset{3}{A}, \overset{4}{B}) \delta f(g(\overset{1}{A}, \overset{4}{B}), \overset{2}{\hat{g}}) +$$

$$+ \overline{[A, \hat{g}]}^{\,4} \delta_{x_1} g(\overset{3}{A}, \overset{5}{A}; \overset{7}{B}) \cdot \delta^2 f(g(\overset{1}{A}, \overset{7}{B}), \overset{2}{\hat{g}}, \overset{6}{\hat{g}}).$$

Второе и третье слагаемые в правой части взаимно уничтожаются, а четвертое преобразуем с помощью (5). Тогда получим

$$f(\hat{g})=f(g(\overset{1}{A},\overset{2}{B}))+\overset{5}{\overline{[A,B]}}\,\delta_{x_1}g(\overset{3}{A},\overset{7}{A};\overset{9}{B})\,\delta_{x_2}g(\overset{3}{A};\overset{4}{B},\overset{6}{B})\,\delta^2 f(g_{\iota}(\overset{1}{A},\overset{9}{B});\overset{2}{\hat{g}};\overset{8}{\hat{g}}).$$

Пусть, например $A, B, A+B\in\mathcal{A}$ и $f\in C^\infty(R)$. Тогда

$$f(A+B)=f(\overset{1}{A}+\overset{2}{B})+\overset{3}{\overline{[A,B]}}\,\delta^2 f(\overset{1}{A}+\overset{5}{B},\overset{2}{\overline{A+B}},\overset{4}{\overline{A+B}}).$$

Из этой формулы получаем разложение оператора $f(A+B)$ до любой степени коммутаторов A, B. Например, разложение до коммутаторов второй степени имеет вид

$$f(A+B)=f(\overset{1}{A}+\overset{2}{B})+\{{}^1/_2\overset{2}{\overline{[A,B]}}f^{(2)}(\overset{1}{A}+\overset{3}{B})\}+$$

$$+\{{}^1/_6(\overset{2}{\overline{[A,[A,B]]}}+\overset{2}{\overline{[[A,B],B]}})f^{(3)}(\overset{1}{A}+\overset{3}{B})+{}^1/_8\overset{2}{\overline{[A,B]}}{}^2 f^{(4)}(\overset{1}{A}+\overset{3}{B})\}+\ldots \quad (6)$$

Доказательство теоремы 1. Из леммы 3 при $A=B_\varepsilon+C_\varepsilon$ следует, что

$$f(B_\varepsilon+C_\varepsilon)=f(B_\varepsilon)+\sum_{k=1}^{m-1}\{\overset{2}{C_\varepsilon}\ldots\overset{2k}{C_\varepsilon}\delta^k f(\overset{1}{B_\varepsilon},\ldots,\overset{2k+1}{B_\varepsilon})\}+\varepsilon^m R_m(f). \qquad (7)$$

Разностную производную $\delta^k f$ разложим по формуле Тейлора:

$$\delta^k f(x_1,\ldots,x_{k+1})=\sum_{|\alpha|=0}^{k^2 r}\frac{1}{(k+|\alpha|)!}f^{(k+|\alpha|)}(x_{k+1})\cdot\prod_{j=1}^{k}(x_j-x_{k+1})^{\alpha_j}+$$

$$+\sum_{j=1}^{k}(x_j-x_{k+1})^{kr+1}Q_j(x_1,\ldots,x_{k+1}),$$

где $Q_j\in C^\infty(R^{k+1})$.

Отсюда и из условий теоремы легко получить, что

$$\overset{2}{C_\varepsilon}\ldots\overset{2k}{C_\varepsilon}\delta^k f(\overset{1}{B_\varepsilon},\ldots,\overset{2k+1}{B_\varepsilon})=\sum_{|\alpha|=0}^{k^2 r}\frac{1}{(k+|\alpha|)!}f^{(k+|\alpha|)}(\overset{2}{B_\varepsilon})\cdot\overset{1}{I_\alpha},$$

где обозначено

$$I_\alpha\equiv\overset{2}{C_\varepsilon}\ldots\overset{2k}{C_\varepsilon}\prod_{j=1}^{k}(\overset{2j-1}{B_\varepsilon}-\overset{2k+1}{B_\varepsilon})^{\alpha_j}.$$

Поэтому, учитывая (7), остается проверить комбинаторное тождество

$$\sum_{|\alpha|=s}I_\alpha=\sum_{|\beta|=s}D_k(\beta)\,[C_\varepsilon,B_\varepsilon]^{(\beta)},\quad s=1,2,\ldots$$

Доказательство теоремы 2 следует из разложения теоремы 1 и (6).

Автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность В. П. Маслову за постановку ряда вопросов и консультации, а также В. В. Кучеренко за внимание и поддержку.

Московский институт
электронного машиностроения

Поступило
21 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. П. Маслов, Операторные методы, «Наука», 1973. [2] Р. П. Фейнман, Сборн. Проблемы современной физики, № 3, ИЛ, 1955, стр. 37. [3] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные функции, в. 2, М., 1958.