

В. Г. КРОТОВ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ
ПО СИСТЕМЕ ФАБЕРА — ШАУДЕРА И УНИВЕРСАЛЬНЫЕ РЯДЫ

(Представлено академиком С. М. Никольским 25 VI 1973)

1. Пусть $\{\Phi_n(x)\}$ — система Фабера — Шаудера ⁽¹⁾, образующая, как известно, базис в пространстве $C[0, 1]$. Т. е. всякая функция $f(x) \in C[0, 1]$ однозначно представима рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) \Phi_n(x) \quad (1)$$

по системе $\{\Phi_n(x)\}$, равномерно сходящимся на $[0, 1]$ к $f(x)$. Ряд (1) будем называть рядом Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\Phi_n(x)\}$.

В настоящей статье изучаются универсальные ряды ⁽²⁾ по системе $\{\Phi_n(x)\}$ и вопросы представления измеримых функций рядами

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(x), \quad (2)$$

коэффициенты которых удовлетворяют условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0. \quad (3)$$

2. А. А. Талалян ⁽³⁾ установил, что любая измеримая на $[0, 1]$ функция $f(x)$ представима почти всюду сходящимся рядом (2), причем выполнено (3). Р. Зинк ⁽⁴⁾ показал, что теорема А. А. Талаляна сохраняет силу для всякой подсистемы $\{\Phi_{n_i}(x)\}$ системы $\{\Phi_n(x)\}$ с

$$\text{mes} \lim_{i \rightarrow \infty} \Delta[\Phi_{n_i}] = 1, \quad (4)$$

где $\Delta[f] = \{x: x \in [0, 1]; f(x) \neq 0\}$. П. Л. Ульянов ⁽¹⁾ нашел условия на функцию $\varphi \in \Phi$, необходимые и достаточные для того, чтобы всякая функция $f(x) \in \varphi(L)$ была представима рядом (2), φ -сходящимся к $f(x)$. Результаты настоящей статьи позволяют усилить эти утверждения в различных направлениях.

3. Будем говорить для краткости, что ряд (2) U_1 -, U_2 - и U_3 -универсален, если он соответственно универсален в обычном смысле, универсален относительно частичных рядов, универсален относительно перестановок в классе измеримых функций в смысле сходимости почти всюду. Пусть Φ — совокупность четных, неотрицательных, конечных, неубывающих и непрерывных справа на $[0, \infty)$ функций $\varphi(x)$ с $\varphi(0) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$. Если функция $\varphi \in \Phi$, то, заменяя класс измеримых функций на класс $\varphi(L)$, а сходимость почти всюду на φ -сходимость ⁽¹⁾, получим аналогично понятия U_v -универсальности, $v = 1, 2, 3$.

4. Пусть $\{c_n\}$ — последовательность действительных чисел.

Теорема 1. Если выполнено (3), то:

1) условие

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \Phi_n(x) = \infty \quad \text{для почти всех } x \in [0, 1] \quad (5)$$

необходимо и достаточко для U_1 -универсальности ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n c_n \Phi_n(x) \quad (6)$$

при некоторых λ_n , $|\lambda_n| = 1$, $n = 0, 1, \dots$;

2) для того чтобы некоторый частичный ряд ряда (2) (некоторый ряд, полученный перестановкой ряда (2)) был U_1 -универсальным, необходимо и достаточко, чтобы при $\Omega^+ \{c_n\} = \{n: c_n > 0\}$, $\Omega^- \{c_n\} = \{n: c_n < 0\}$ выполнялось условие

$$\sum_{n \in \Omega^+ \{c_n\}} c_n \Phi_n(x) = +\infty, \quad \sum_{n \in \Omega^- \{c_n\}} c_n \Phi_n(x) = -\infty \quad \text{для почти всех } x \in [0, 1]. \quad (7)$$

Теорема 2. Если выполнено условие (3), то ряд (2) U_v -универсален при $v=2$ (или $v=3$) тогда и только тогда, когда имеет место (7).

Определение. Ряд (2) назовем S -универсальным, если для любой измеримой на $[0, 1]$ функции $f(x)$ существует такая последовательность знаков $\{\lambda_n\}$, $|\lambda_n| = 1$, $n = 0, 1, \dots$, что ряд (6) сходится к $f(x)$ почти всюду на $[0, 1]$.

Аналогично получаем понятие S^Φ -универсального ряда, где функция $\Phi \in \Phi$.

Теорема 3. При условии (3) ряд (2) S -универсален тогда и только тогда, когда выполнено (5).

Теоремы 1–3 позволяют выяснить взаимоотношения различных типов универсальности для рядов (2), коэффициенты которых удовлетворяют условию (3).

Теорема 4. Если выполнено (3), то $U_1 \Rightarrow U_2 \Leftrightarrow U_3 \Rightarrow S$.

Из сформулированных теорем легко получить следствие, непосредственно усиливающее упомянутые результаты А. А. Талаляна (3) и Р. Зинка (4).

Следствие 1. Если выполнено (4), то существуют ряды

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \Phi_{n_i}(x), \quad (8)$$

одновременно S -универсальные и U_v -универсальные, $v=1, 2, 3$, причем выполнено (3).

5. Рассмотрим теперь классы $\Phi(L)$ и Φ -сходимость.

Теорема 5. Если функция $\Phi \in \Phi$ и

$$\Phi(x+1) = O\{\Phi(x)\} \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad (9)$$

то: 1) при условиях (3) и (5) ряд (2) S^Φ -универсален; 2) при условиях (3) и (7) ряд (2) U_v^Φ -универсален, $v=2, 3$.

Следствие 2. Пусть функция $\Phi \in \Phi$ и выполнено (9). При условии (4) существуют ряды вида (8), одновременно S^Φ -универсальные и U_v^Φ -универсальные, $v=2, 3$, причем выполнено (3).

Следствие 2 усиливает в некоторых отношениях теорему 5.1 работы (1). Из теоремы 5.2 работы (1) и следствия 2 вытекает

Теорема 6. Пусть функция $\Phi \in \Phi$. Условие (9) необходимо и достаточно для того, чтобы: 1) существовал S^Φ -универсальный ряд вида (2); 2) существовал U_2^Φ -универсальный ряд вида (2).

6. Доказательство теорем 1—3 и 5 основано на применении следующих лемм.

Лемма 1. Пусть последовательность $\{c_n\}$, $c_n \geq 0$, удовлетворяет условиям (3) и (5). Пусть заданы также полином по системе Хаара $\chi(x)$, натуральное число $m \geq 1$, числа $\delta > 0$ и $\eta > 0$.

Тогда существуют конечные множества натуральных чисел ω^- и ω^+ , $\omega^- \cap \omega^+ = \emptyset$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\min \{\min \omega^-, \min \omega^+ \} > m,$$

$$\Delta \left[\sum_{n \in \omega^-} c_n \Phi_n \right] \cap \Delta \left[\sum_{n \in \omega^+} c_n \Phi_n \right] = \emptyset,$$

$$\left| \sigma_N \left(x, \sum_{n \in \omega^- \cup \omega^+} \lambda_n c_n \Phi_n \right) \right| \leq |\chi(x)|, \quad x \in [0, 1], \quad N = 1, 2, \dots,$$

$$\text{mes} \left\{ x: x \in [0, 1]; \left| \chi(x) - \sum_{n \in \omega^- \cup \omega^+} \lambda_n c_n \Phi_n(x) \right| \geq \delta \right\} < \eta,$$

где $\lambda_n = +1$ при $n \in \omega^+$, $\lambda_n = -1$ при $n \in \omega^-$, а $\sigma_N(x, f)$ — N -я частная сумма ряда (1).

Лемма 2. Если c_0, \dots, c_m — действительные числа, то при некоторых λ_n , $|\lambda_n| = 1$, $n = 0, \dots, m$, выполнены неравенства

$$\left\| \sigma_N \left(x, \sum_{n=0}^m \lambda_n c_n \Phi_n \right) \right\|_{C[0,1]} \leq \max_{0 \leq n \leq m} |c_n|.$$

7. В этом пункте мы решим вопрос о существовании универсальных рядов Фурье (1) для функций с максимально возможной степенью гладкости в терминах модулей непрерывности.

Теорема 7. Пусть $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности со свойствами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \omega \left(\frac{1}{n} \right) = \infty,$$

$$0 < C_1 \leq \omega(\delta^2) / \omega(\delta) \leq C_2 < 1 \quad \text{при } 0 < \delta \leq \delta_0 < 1 \quad (10)$$

и для функции $\varphi \in \Phi$ выполнено (9).

Тогда существует функция $f(x) \in H^{\omega}$, ряд Фурье (1) которой: 1) одновременно U_v -, S -, U_v^{Φ} - и S^{Φ} -универсален, $v = 2, 3$; 2) становится U_3 -универсальным после выбрасывания некоторых членов (после некоторой перестановки, после некоторого выбора знаков у коэффициентов $c_n(f)$).

Доказательство теоремы 7 вытекает из теорем 1—3, 5, теоремы С. В. Бочкарева ⁽⁵⁾ и следующего утверждения.

Теорема 8. При условии (3) существует такая последовательность знаков $\{\lambda_n\}$, $|\lambda_n| = 1$, $n = 0, 1, \dots$, что ряд (6) сходится в $C[0, 1]$.

Утверждение теоремы 7 теряет силу при замене первого условия (10)

на $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \omega \left(\frac{1}{n} \right) < \infty$, ибо в этом случае для любой функции $f(x) \in H^{\omega}$ ряд

Фурье (1) сходится в $C[0, 1]$ безусловно ⁽⁵⁾.

В связи с теоремой 7 заметим, что никакой ортогональный ряд Фурье функции $f(x) \in L^2$ не может быть U_3 -универсальным даже для сходимости по мере.

Следствие 3. Для любой измеримой на $[0, 1]$ функции $f(x)$ (функции $f(x) \in \varphi(L)$, где $\varphi \in \Phi$ удовлетворяет условию (9)) существует ряд (2),

сходящийся к $f(x)$ почти всюду на $[0, 1]$ (соответственно φ -сходящийся к $f(x)$), причем выполнено соотношение

$$c_n = o(1/\log n) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Следствие 4. Пусть для функции $\varphi \in \Phi$ выполнено (9). Существуют U_v -, S -, U_μ^* - и S^* -универсальные ряды (2), $v=1, 2, 3$; $\mu=2, 3$, коэффициенты которых удовлетворяют условию (11).

Заметим, что утверждения следствий 3 и 4 теряют силу при замене условия (11) на условие $c_n = o(1/\log^{1+\varepsilon} n)$ при $n \rightarrow \infty$, где $\varepsilon > 0$.

8. Полученные результаты позволяют говорить о том, что выбор знаков у коэффициентов рядов (2) является не менее естественным преобразованием ряда по сравнению с его перестановками или с выбором частичных рядов. Далее, ряды Фурье по системе Фабера — Шаудера не только представляют функции класса $C[0, 1]$ в смысле равномерной сходимости на $[0, 1]$, но и могут служить аппаратом представления измеримых функций в смысле сходимости почти всюду и в смысле φ -сходимости.

9. В заключение отметим, что для S -универсальности имеет место следующий аналог теоремы Д. Е. Меньшова ⁽⁶⁾ об универсальных тригонометрических рядах.

Теорема 9. Если выполнено условие (3), то ряд (2) является суммой двух S -универсальных рядов по системе $\{\Phi_n(x)\}$.

Пользуясь случаем, автор благодарит В. А. Андриенко за постоянное внимание и ценные советы.

Одесский государственный университет
им. И. И. Мечникова

Поступило
22 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ П. Л. Ульянов, УМН, 27, в. 2 (1972). ² А. А. Талаян, УМН, 15, в. 5 (1960). ³ А. А. Талаян, Изв. АН АрмССР, сер. ф.-м. н., 12, № 3 (1959). ⁴ R. E. Zink, Proc. Am. Math. Soc., 21, № 3 (1969). ⁵ С. В. Бочкарёв, Матем. заметки, 4, № 4 (1968). ⁶ Д. Е. Меньшов, Матем. сборн., 20, № 2 (1947).