Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 6

УДК 513.831 *МАТЕМАТИКА*

Л. А. ЛЮКСЕМБУРГ

О КОМПАКТАХ С НЕСОВПАДАЮЩИМИ ТРАНСФИНИТНЫМИ РАЗМЕРНОСТЯМИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 7 II 1973)

В классе метрических пространств, как показал P. Roy [1], существует пространство с несовпадающими конечными размерностями ind и Ind. Для любого компакта Y равенство

$$\operatorname{ind} Y = \operatorname{Ind} Y \tag{1}$$

выполнено, если компакт Y конечномерен. Здесь мы покажем, что равенство (1) не всегда верно для компактов в случае трансфинитных значений $\operatorname{ind} Y$ и $\operatorname{Ind} Y$. Это решает вопрос, поставленный в 1956 г. Ю. М. Смирновым.

Рассмотрим подробно компакт $X = X_{\omega_0}$ с размерностями $\operatorname{ind} X = \omega_0 + 1$ и $\operatorname{Ind} X = \omega_0 + 2$. Для этого нам потребуются некоторые предварительные леммы и определения.

Определение 1. Пусть $S = \{S_\alpha : \alpha \in A\}$ — некоторая система $(n-1)$-мерных сфер в n-мерном эвклидовом пространстве E^n. Тогда система S находится в общем положении, если пересечение любых q различных сфер из системы S либо пусто, либо есть $(n-q)$-мерная сфера, $q = 1, \ldots, n+1$.

Определение 2. Сферой (шаром) в единичном кубе Q^n, лежащем в эвклидовом пространстве E^n, будем называть пересечение $S \cap Q_n^n$ (соответственно $B \cap Q^n$), где S — сфера, а B — шар в E^n. Если система сфер $S = \{S_\alpha : \alpha \in A\}$ находится в общем положении в E^n, то по определению система $S' = \{S_\alpha \cap Q^n : \alpha \in A\}$ находится в общем положении в Q^n. Будем считать диаметр сферы $S_\alpha \cap Q^n$ в Q^n равным диаметру S_α в E^n; система шаров $\mathscr{B} = \{B_\alpha : \alpha \in A\}$ находится в общем положении, если система $S = \{\operatorname{Fr} B_\alpha = S_\alpha : \alpha \in A\}$ находится в общем положении.

Определение 3. Пусть D — дуга в пространстве E^3 (радианной меры $< \pi$) и H — стягивающая ее хорда с концами A и B. Тогда веретеном с осью H и вершинами A, B назовем фигуру, ограниченную поверхностью вращения дуги D вокруг хорды H в пространстве E^3. Два веретена будем считать касающимися, если они имеют ровно одну общую точку, являющуюся вершиной каждого из них. Веретено V касается шара B, если пересечение $V \cap B$ содержит ровно одну точку, являющуюся вершиной веретена V.

Лемма 1. *Рассмотрим единичный куб Q^3 в трехмерном эвклидовом пространстве E^3 и пару его противоположных граней (A, A'). Если $\mathscr{U} = \{S_i : i = 1, \ldots, k\}$ — конечная система сфер диаметра < 1, находящаяся в общем положении в кубе Q^3, то для любого $\varepsilon > 0$ существует перегородка $C(\varepsilon)$ между гранями A и A' в кубе такая, что $(*)$ пересечение любой сферы нашей системы с перегородкой $C(\varepsilon)$ есть объединение конечного числа дизъюнктных открыто-замкнутых в этом пересечении множеств диаметра $< \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{\mathscr{U}} = \{\tilde{S}_i : i = 1, \ldots, k\}$ — такая система сфер в пространстве E^3, что $\tilde{S}_i \cap Q^3 = S_i$ для всех i, и $\tilde{A}, \tilde{A}'$ — плоскости граней A, A' соответственно. Построим некоторое множество $P(\varepsilon) = (E^3 \setminus \bigcup_{i=1}^{k} S_i) \cup \Phi$, где Ф есть объединение конечного числа шаров и двуугольников (под двуугольником мы понимаем замкнутую фигуру, ограниченную на сфере двумя дугами, имеющими ровно две общие точки). Рассмотрим систему $T=\{T_j\colon j=1,\ldots,q\}$ окружностей, являющихся пересечениями всевозможных пар сфер из $\tilde{\mathscr{U}}$. Поскольку система $\tilde{\mathscr{U}}$ находится в общем положении, то система T обладает следующими свойствами:

1) Любая точка в объединении $T^*=\bigcup\limits_{j=1}^{q} T_j$ принадлежит либо ровно трем окружностям, либо одной.

2) Множество T^* высекает на каждой сфере $\tilde{S}_i\in\tilde{\mathscr{U}}$ конечную систему окружностей кратности $\leqslant 2$.

В силу свойств 1) и 2) множество T^* можно покрыть конечной системой замкнутых шаров и веретен $\mathscr{B}=\{B_i\colon i=1,2,\ldots,r;\ B_i$ — шар, $V_p\colon p=1,\ldots,s$, V_p — веретено$\}$ так, чтобы выполнялись условия:

3) Любая точка трехкратности системы T (ее мы будем называть узловой точкой) есть центр некоторого шара системы $\mathscr{B}$, и каждый шар из системы $\mathscr{B}$ имеет центр в узловой точке.

4) Любые два элемента из системы $\mathscr{B}$ либо касаются, либо не пересекаются, а шары B_i, $i=1,2,\ldots,r$, дизъюнктны.

5) Осью каждого веретена V_p из системы $\mathscr{B}$ является хорда H_p одной из окружностей системы T и дуга, стягиваемая этой хордой, лежит внутри V_p.

6) Любой шар касается не более шести веретен, а каждое веретено касается не более одного шара и не более одного веретена, либо не более двух веретен (если не касается шара), и не менее одного веретена.

7) Диаметр каждого элемента системы $\mathscr{B}<\min(\varepsilon/6,\ (1-\eta)/3)$, где $\eta=\max\{\operatorname{diam}, \tilde{S}_i\colon \tilde{S}_i\in\tilde{\mathscr{U}}\}<1$.

8) Любой шар пересекается не более чем с тремя сферами системы $\mathscr{U}$, а любое веретено не более чем с двумя.

9) Любая окружность $T_i\in T$, не содержащая точек трехкратности системы T, покрыта четным числом веретен.

Из свойств (3—9) следует, что каждому веретену V_p системы $\mathscr{B}$ можно сопоставить номер $N(V_p)$ (занумеровав веретена «через один») так, что $V_p\cap\tilde{S}_{N(V_p)}\neq\varnothing$ и если веретено V_p касается веретена V_q, то $N(V_p)\neq N(V_q)$, $N(V_p)=1,\ldots,k$. Номера соседних с V_p веретен, если их два, очевидно, равны. Номер каждого соседнего с V_p веретена обозначим через $N^*(V_p)$. Ясно, что $V_p\cap\tilde{S}_{N_*(V_p)}\neq\varnothing$. Определим теперь множество Ф. Положим $\Phi=\bigcup\{B_i\colon B_i\in\mathscr{B}\}\cup\{R_p=\operatorname{Fr} V_p\cap\tilde{S}_{N(V_p)},\ p=1,\ldots,s\}$. Из свойства 5) следует, что множество R_p есть граница двуугольника $W_p=V_p\cap\tilde{S}_{N(V_p)}$ на сфере $\tilde{S}_{N(V_p)}$.

Теперь множество $P(\varepsilon)$ определено. Из его определения непосредственно вытекает, что на каждой сфере $\tilde{S}_i$ системы $\tilde{\mathscr{U}}$ оно высекает конечное число границ двуугольников и сферических кругов, причем компонента каждой точки из $\tilde{S}_i\cap P(\varepsilon)$ состоит из границы двуугольника, либо из сферического круга и некоторого, не большего четырех, числа границ двуугольников. Поэтому (в силу условий 7)) диаметр каждой компоненты в $\tilde{S}_i\cap P(\varepsilon)$ меньше ε. Отсюда следует, что если $C(\varepsilon)\subset P(\varepsilon)$, то условие (*) выполнено.

Как вытекает из построения, любую точку $x\in\tilde{S}_i\setminus P(\varepsilon)$, где $\tilde{S}_i\in\tilde{\mathscr{U}}$, такую, что x не лежит внутри никакого двуугольника W_p, $p=1,\ldots,s$, можно соединить дугой в $E^3\setminus P(\varepsilon)$ лишь с такими точками из других сфер системы $\mathscr{U}$, которые лежат внутри двуугольников W_p, причем $N^*(V_p)=i$. Точки x с описанными свойствами назовем правильными.

Поскольку любую точку множества $E^3\setminus P(\varepsilon)$ можно соединить дугой в $E^3\setminus P(\varepsilon)$ с некоторой правильной точкой и множество $E^3\setminus P(\varepsilon)$ локально линейно связно, то оно распадается в конечное число компонент правильных точек. Так как диаметр каждого элемента системы $\mathscr{B}$ меньше $(1-\eta)/3$ и диаметр сфер из системы $\tilde{\mathscr{U}}\leqslant\eta<1$, то диаметр каждой компоненты в множестве $E^3\setminus P(\varepsilon)\leqslant\eta+$

$+2(1-\eta)/3<1$. Таким образом, ни одна из этих компонент не может одновременно пересекаться и с $\tilde{A}$, и с $\tilde{A}'$. Используя этот факт и наследственную нормальность пространства E^3, получаем пару таких открытых множеств U и V в E^3, что

$$U \cup V \supset E^3 \setminus P(\varepsilon), \quad U \cap V = \emptyset, \quad U \supset \tilde{A}, \quad V \supset \tilde{A}'. \tag{3}$$

Положим $C(\varepsilon) = (E^3 \setminus U \cup V) \cap Q^3$. Из свойства (3) следует, что $C(\varepsilon)$ — перегородка между A и A' в Q^3. Лемма доказана.

Следующие две леммы доказываются просто.

Лемма 2. *Пусть Z — компакт с метрикой ρ такой, что $Z = K \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$, где K замкнуто и конечномерно, а L_n открыто-замкнуты в Z и конечномерны.*

Тогда, если в любой окрестности OK компакта K в Z лежат все, кроме конечного числа, множества L_n и $\lim_{n\to\infty} (\operatorname{diam} L_n) = 0$, то $\operatorname{ind} Z \leqslant \omega_0$.

Лемма 3. *В единичном n-мерном кубе Q^n есть база, состоящая из шаров в Q^n и находящаяся в общем положении.*

Построение компакта X. Мы определим компакт X как подпространство компакта K_{ω_0+3} ([4]), который определяется как произведение $Q^3 \times K_{\omega_0}$, где $K_{\omega_0} = \{p\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} I^n$ — компактификация с помощью точки p дискретной суммы кубов I^n, $n=1, 2, \ldots$, а Q^3 — трехмерный куб. Пусть $\mathscr{B} = \{B_n\colon n=1, 2, \ldots\}$ — база в кубе Q^3, состоящая из шаров диаметра меньше $1/2$ и находящаяся в общем положении. Пусть $\mathscr{U}_n = \{S_i, i=1, \ldots, n, S_i = \operatorname{Fr} B_i, B_i \in \mathscr{B}\}$ — конечная система сфер в кубе Q^3, ε_n — положительное число, меньшее $1/n$, и A, A' — пара противоположных граней в Q^3. Тогда положим $C_n = C(\varepsilon_n)$, где $C(\varepsilon_n)$ — двумерная перегородка между A и A' в Q^3, удовлетворяющая условию (*) из леммы 1 для системы $\mathscr{U}_n$ и $\varepsilon = \varepsilon_n$.

Положим теперь $X = \tilde{Q}^3 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} I^n \times C_n$, где $\tilde{Q}^3 = \{p\} \times Q^3$. Ясно, что X — слабосчетномерный компакт. Найдем теперь размерности $\operatorname{ind} X$ и $\operatorname{Ind} X$, которые существуют, так как X счетномерен ([5], [6]).

А) $\operatorname{Ind} X \geqslant \omega_0 + 2$. Для этого достаточно показать, что в K_{ω_0+3} существуют две пары дизъюнктных замкнутых множеств (F_1, G_1) и (F_2, G_2) таких, что любые две перегородки D_1 и D_2 между ними в K_{ω_0+3} удовлетворяют условию

$$\operatorname{Ind} (D_1 \cap D_2 \cap X) \geqslant \omega_0. \tag{4}$$

Положим $F_1 = B \times K_{\omega_0}$, $G_1 = B' \times K_{\omega_0}$, $F_2 = C \times K_{\omega_0}$, $G_2 = C' \times K_{\omega_0}$, где (B, B') и (C, C') — пары противоположных граней в Q^3, ортогональные к паре A, A'. Пусть D_1 и D_2 — произвольные перегородки, разделяющие соответственно пары (F_1, G_1) и (F_2, G_2) в K_{ω_0+3}. Возьмем произвольное натуральное число n, тогда $D_1 \cap D_2 \cap X \supset D_1 \cap D_2 \cap (I_n \times C_n) \cap I^n \times Q^3$. Поскольку $D_1 \cap (I^n \times Q^3)$, $D_2 \cap (I^n \times Q^3)$ и $C_n \times I^n$ — перегородки в $(n+3)$-мерном кубе $I^n \times Q^3$, разделяющие различные пары противоположных граней, то их пересечение имеет размерность $\geqslant n$ ([5]). Поэтому $\operatorname{Ind} (D_1 \cap D_2 \cap X) \geqslant n$. Так как n произвольно, то условие (4) выполнено.

Б) $\operatorname{ind} X \leqslant \omega_0 + 1$. Так как любая точка из $X \setminus \tilde{Q}^3$ обладает конечномерной окрестностью, то неравенство Б) достаточно проверить для точек из $\tilde{Q}^3$. Определим систему V открытых множеств в X. Положим $V = \{V_n\colon V_n = X \cap (B_n \times (K_{\omega_0} \setminus \bigcup_{m=1}^{n} I^m)), B_n \in \mathscr{B}\}$. Система V образует базу в точках $\tilde{Q}^3$

относительно X и $\mathrm{Fr}_X \bar{V}_n \equiv S^n \times (K_{\omega_0} \setminus \bigcup_{m=1}^{n} I^m) \cap X$, где S^n — комбинаторная граница B^n в кубе Q^3. В силу построения множеств C_n и леммы 2 имеем: $\mathrm{ind}\,\mathrm{Fr}_X V_n \leqslant \omega_0$, откуда следует Б). Из А) и Б) следует, что $\mathrm{ind}\, X < \mathrm{Ind}\, X$. Нетрудно доказать также и неравенства $\mathrm{ind}\, X \geqslant \omega_0 + 1$ и $\mathrm{Ind}\, X \leqslant \omega_0 + 2$.

Теорема 1. *Пусть α — предельный трансфинит счетного характера, а n — натуральное число. Тогда существует бикомпакт X_α веса $|\alpha|$ такой, что*

$$\mathrm{Ind}\, X_\alpha = \alpha + n + 1, \quad \mathrm{ind}\, X_\alpha \leqslant \alpha + n. \tag{5}$$

Теорема 2. *Для произвольного вполне регулярного пространства Z, имеющего трансфинитную размерность $\mathrm{ind}\, Z$, и единичного отрезка I имеет место неравенство*

$$\mathrm{ind}\,(Z \times I) \leqslant \mathrm{ind}\, Z + 1 \quad ({}^3, {}^7). \tag{6}$$

Следствие 1. *Для любого счетного трансфинита α существует слабосчетномерный компакт X_α такой, что*

$$\mathrm{ind}\, X_\alpha \leqslant \alpha + 1, \quad \mathrm{Ind}\, X_\alpha = \alpha + 2. \tag{7}$$

Определение 4. Предельный трансфинит α называется инвариантным, если $\alpha = \omega_0 + \beta$, причем β удовлетворяет условию $\omega_0 \times \beta = \beta$. Очевидно, что всякий неразложимый трансфинит $\geqslant \omega_0^{\omega_0}$ инвариантен.

Теорема 3. *Если X — наследственно нормальный бикомпакт и α — инвариантный трансфинит $\geqslant \omega_0^{\omega_0}$, то справедливы следующие утверждения:*

а) *если* $\mathrm{ind}\, X = \alpha$, *то размерности* $\mathrm{ind}\, X$ *и* $\mathrm{Ind}\, X$ *равны*;

б) *если* $\mathrm{Ind}\, X = \alpha + 1$, *то и* $\mathrm{ind}\, X = \alpha + 1$.

Теорема 4. *Если X — метрическое пространство, имеющее размерность $\mathrm{Ind}\, X$, то для X выполнены условия* а) *и* б) *теоремы* 3 (*здесь мы предполагаем, что $\alpha \geqslant \omega_0^2$*).

Определение 5. Построим для каждого порядкового числа α бикомпакт K_α веса $\leqslant \max(\aleph_0, |\alpha|)$. Если $\alpha = 0$, то K_α есть точка. Пусть α — предельное число, тогда полагаем бикомпакт K_α равным одноточечной бикомпактификации дискретной суммы бикомпактов K_β, $\beta < \alpha$. Кроме того, полагаем $K_{\alpha+1} = K_\alpha \times I$, где I — отрезок. Заметим, что для счетных α пространства K_α есть компакты Смирнова.

Теорема 5. *Пусть α — предельный трансфинит счетного характера, n — натуральное число, тогда для бикомпактов из определения 5 имеем*

$$\mathrm{ind}\, K_{\alpha+n+2} < \mathrm{Ind}\, K_{\alpha+n+2} = \alpha + n + 2. \tag{8}$$

Если α — счетный инвариантный трансфинит, а $i = 0, 1, 2$, то

$$\mathrm{ind}\, K_{\alpha+i} = \mathrm{Ind}\, K_{\alpha+i} = \alpha + i. \tag{9}$$

Неравенство (8) дает отрицательный ответ на вопрос, поставленный Ю. М. Смирновым, о совпадении размерностей ind и Ind для компактов K_α.

Следствие 2. *Равенство* $\mathrm{ind}(X \times I) = \mathrm{ind}\, X + 1$ *неверно даже в классе компактов.*

В заключение автор выражает благодарность Б. А. Пасынкову за советы и интерес к работе.

Московский государственный педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
26 I 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Роу, Bull. Am. Math., **68**, 609 (1962). [2] В. В. Филиппов, ДАН, **202**, № 5 (1972). [3] В. В. Филиппов, ДАН, **184**, № 5 (1969). [4] Ю. М. Смирнов, Изв. АН СССР, сер. матем., **23**, № 2 (1959). [5] В. Гуревич, Г. Волмен, Теория размерности, М., 1948. [6] Ю. М. Смирнов, Матем. сборн., **58**, № 4 (1962). [7] С. Н. Toulmin, Proc. London Math. Soc., **3**, 177 (1954). [8] Л. А. Люксембург, ДАН, **209**, № 2 (1973).