Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 6

УДК 517.43 *МАТЕМАТИКА*

Х. Х. МУРТАЗИН

О НЕПРЕРЫВНОМ СПЕКТРЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 26 II 1973)

1. В настоящей заметке изучается зависимость между характером спектральной функции дифференциального оператора и свойством роста решений соответствующих обобщенных собственных функций. Полученные результаты примыкают к континуальному аналогу одной гипотезы В. А. Стеклова (см. ([1])).

В пространстве $H=\mathscr{L}_2([0,\infty);l_2)$ вектор-функций $f(x)$, $g(x),\ldots$ со значениями из l_2 рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lf=-f''(x)+V(x)f(x),\qquad f(0)=0,\tag{1}$$

где $V(x)=V^*(x)$ — оператор-функция в l_2, непрерывная в равномерной операторной топологии. Скалярное произведение в H имеет вид

$$(f,g)_H=\int\limits_0^\infty (f(x),g(x))_{l_2}\,dx,$$

дифференцирование в (1) понимается в сильном смысле. Через $\|\cdot\|_{l_2}$ и $\|\cdot\|$ будем соответственно обозначать норму элемента и норму оператора в l_2.

1. Пусть $Y(x,\lambda)$ — оператор-функция в l_2, являющаяся решением задачи

$$-Y''(x,\lambda)+V(x)Y(x,\lambda)=\lambda Y(x,\lambda),\qquad Y(0,\lambda)=0,\qquad Y'(0,\lambda)=I,\tag{2}$$

где I — единичный оператор в l_2.

Лемма 1. *Пусть $\lambda>0$, $f\in l_2$. Тогда оператор-функция*

$$A(x,\lambda)=Y(x,\lambda)-i\sqrt{\lambda}Y(x,\lambda)\tag{3}$$

удовлетворяет оценке

$$\|f\|_{l_2}^2\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^x\|V(t)\|dt\right)\leqslant\|A(x,\lambda)f\|_{l_2}^2\leqslant\|f\|_{l_2}^2\exp\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^x\|V(t)\|dt\right).\tag{4}$$

Если $V(x)$ сильно дифференцируема и $\|V(x)\|\to0$ при $x\to\infty$, то справедлива также оценка

$$\ln\frac{\|A(x,\lambda)f\|_{l_2}^2-(V(x)Y(x,\lambda)f,Y(x,\lambda)f)_{l_2}}{\|A(N,\lambda)f\|^2-(V(N)Y(N,\lambda)f,Y(N,\lambda)f)_{l_2}}\leqslant\int\limits_N^x\frac{\|V'(t)\|}{\lambda-\|V(t)\|}dt,\tag{5}$$

где $N>0$ — достаточно большое число.

Доказательство вытекает из (2) и легко проверяемого соотношения

$$\|A(x,\lambda)f\|_{l_2}^2=\|Y'(x,\lambda)f\|_{l_2}^2+\lambda\|Y(x,\lambda)f\|_{l_2}^2.\tag{6}$$

Определение. Решение $Y(x,\lambda)$ задачи (2) назовем устойчивым, если для всех $x\in[0,\infty)$

$$C_1(\lambda)\leqslant\|A(x,\lambda)\|\leqslant C_2(\lambda),\tag{7}$$

где $C_2(\lambda)\geqslant C_1(\lambda)>0$ не зависят от x.

Аналогично назовем $Y(x, \lambda)$ равномерно устойчивым в интервале (α, β), если существуют числа $\mathring{C}_2 \geqslant \mathring{C}_1 > 0$, не зависящие от λ и x, такие, что для всех $\lambda \in (\alpha, \beta)$ и $x \in [0, \infty)$

$$\mathring{C}_1 \leqslant \|A(x, \lambda)\| \leqslant \mathring{C}_2. \tag{8}$$

Лемма 2. *Пусть выполнено одно из следующих условий:*

1) $\|V(x)\| \in \mathscr{L}(0, \infty)$,

2) $\|V'(x)\| \in \mathscr{L}(0, \infty)$, $\lim\limits_{x\to\infty} \|V(x)\| = 0$.

Тогда решение задачи (2) *равномерно устойчиво в любом интервале* $[\alpha, \beta] \subset (0, \infty)$.

Доказательство вытекает из леммы 1.

2. Пусть E_λ — разложение единицы оператора L, $E(\Delta) = E_\beta - E_\alpha$, $\Delta = (\alpha, \beta)$. Справедлива.

Теорема 1. *Если решение задачи* (2) *равномерно устойчиво в интервале* $\Delta = (\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$, *то на интервале* Δ *спектр оператора* L *абсолютно непрерывен. Кроме того, справедливо разложение*

$$(E(\Delta)f, g)_H = \int_\alpha^\beta P(\lambda)\tilde{Y}(f, \lambda), \tilde{Y}(g, \lambda))_{l_2} d\lambda, \tag{9}$$

где

$$\tilde{Y}(f, \lambda) = \int_0^\infty Y^*(x, \lambda) f(x)\, dx, \tag{10}$$

а оператор-функция $P(\lambda)$ *определяется соотношением*

$$P(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \lim_{x\to\infty} [A(x, \lambda) A^*(x, \lambda)]^{-1}, \tag{11}$$

где предел понимается в слабой операторной топологии, $A(x, \lambda)$ *определяется формулой* (3).

Доказательство. Пусть $\{P_n\}$ — последовательность конечномерных ортогональных проекторов, сильно стремящаяся к I,

$$V_a(x) = \begin{cases} V(x), & 0 \leqslant x \leqslant a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

Рассмотрим в H оператор

$$L_{na} f = -f''(x) + P_n V_a(x) P_n f(x), \quad f(0) = 0. \tag{12}$$

Очевидно, последовательность L_{na} при $n \to \infty$ сильно сходится к оператору

$$L_a f = -f''(x) + V_a(x) f(x), \quad f(0) = 0. \tag{13}$$

Через $E_{na}(\Delta)$ и $E_n(\Delta)$ обозначим соответственно спектральные семейства операторов L_{na} и L_a. В силу конечномерности $P_n V_a(x) P_n$ для получения разложения $E_{na}(\Delta)$ можно применить метод интегральных уравнений (см., например, ([2])). Тогда покажем, что

$$(E_{na}(\Delta)f, g)_H = \int_\alpha^\beta (\tilde{U}_{na}(f, \lambda), \tilde{U}_{na}(g, \lambda))_{l_2} d\lambda, \tag{14}$$

где $U_{na}(x, \lambda)$ — решение интегрального уравнения

$$U_{na}(x, \lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}\, x}{\sqrt{2\pi}\, \lambda^{1/4}} I + \int_0^a G(x, s, \lambda) P_n V_a(s) P_n U_{na}(s, \lambda)\, ds, \tag{15}$$

$$G(x, s, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \begin{cases} \sin\sqrt{\lambda}\, x\, e^{i\sqrt{\lambda}\, s} & x \leqslant s, \\ \sin\sqrt{\lambda}\, s\, e^{i\sqrt{\lambda}\, x}, & x > s, \end{cases} \tag{16}$$

$\tilde{U}_{na}(f, \lambda)$ определяется равенством, аналогичным (10).

Далее, пусть $Y_{na}(x, \lambda)$ и $Y_a(x, \lambda)$ означают решения задачи (2), где $V(x)$ заменена соответственно на $P_n V_a(x) P_n$ и $V_a(x)$. Так как $U_{na}(x, \lambda)$ удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и $Y_{na}(x, \lambda)$, и $U_{na}(0, \lambda)=0$, то существует оператор-функция $D_{na}(\lambda)$ такая, что

$$U_{na}(x, \lambda)=Y_{na}(x, \lambda) D_{na}(\lambda). \tag{17}$$

Из (15) — (17) получим, что

$$D_{na}(\lambda)=\frac{\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\sqrt{\lambda}\, a}[Y'_{na}(a,\lambda)-i\sqrt{\lambda}\, Y_{na}(a,\lambda)]^{-1}. \tag{18}$$

Откуда с учетом леммы 1, равенств (14), (17), (18) и очевидного соотношения $Y_a(a,\lambda)=Y(a,\lambda)$, получим формулу

$$(E_a(\Delta)f,g)_H=\int_\alpha^\beta (P_a(\lambda)\tilde{Y}_a(f,\lambda),\tilde{Y}(g,\lambda))_{l_2}\, d\lambda, \tag{19}$$

где

$$P_a(\lambda)=\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}[A(a,\lambda)A^*(a,\lambda)]^{-1}. \tag{20}$$

Теперь формулы (9) и (11) непосредственно следуют из (19) и (20). Абсолютная непрерывность спектра оператора L на интервале (α, β) есть следствие (9) и неравенства

$$\frac{\sqrt{\lambda}\,\|f\|_{l_2}^2}{2\pi\mathring{C}_2}\leqslant (P(\lambda)f,f)_{l_2}\leqslant\frac{\sqrt{\lambda}\,\|f\|_{l_2}^2}{2\pi\mathring{C}_1},$$

которое вытекает из (8).

Следствие. *Пусть $V(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2. Тогда спектр оператора L абсолютно непрерывен на интервале* $(0, \infty)$.

3. Методика п. 2 обобщается на случай более сложных операторов в H:

$$L_1y=-y''(x)+x^{-2}Ay(x)+V(x)y(x), \quad y(0)=0,$$

$$L_2y=-y''(x)+\sum_{k=1}^n x^{-p_k}A_k y(x)+V(x)y(x), \quad y(0)=0,$$

где

$$A\geqslant 0, \quad A_k\geqslant 0, \quad p_k>0, \quad k=1,\ldots,n.$$

Пусть оператор-функция $R_i(x, s, \lambda)$ есть ядро оператора $(L_i-\lambda I)^{-1}$, $E_i(\Delta)$ — спектральное семейство оператора L_i, $i=1, 2$.

Теорема 2. *Пусть $V(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2. Тогда:*

1) *на интервале $(0, \infty)$ спектр оператора L_1 абсолютно непрерывен,*

2) *имеет место разложение*

$$(E_1(0,\infty)f,g)_H=\int_0^\infty \tilde{U}(f,\lambda),\tilde{U}(g,\lambda))_{l_2}\, d\lambda,$$

где оператор-функция $U(x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению $L_1u=\lambda u$, $U(0, \lambda=0)$, и оценке: при любых $\delta>0$ и $h\in l_2$

$$\int_0^\infty (1+x)^{-1-\delta}\|U(x,\lambda)h\|_{l_2}^2\, dx\leqslant C(\delta)\lambda^{-1/2}, \tag{21}$$

где $C(\delta)>0$ зависит лишь от δ и $C(\delta)\to\infty$ при $\delta\to 0$,

3) *при дополнительном условии $V(x)\geqslant 0$ оператор $R_1(z)$ с ядром $(1+x)^{-(1+\delta)/2}(1+y)^{-(1+\delta)/2}R_1(x, y, z^2)$ удовлетворяет для всех $z\neq 0$, $\operatorname{Im} z\geqslant 0$*

оценке

$$\|\hat{R}_1(z)\| \leqslant C_1(\delta)\,|z|^{-1}, \tag{22}$$

где $C_1(\delta)>0$ *зависит лишь от* $\delta>0$ и $C_1(\delta)\to\infty$ *при* $\delta\to 0$,

4) *если оператор* A *имеет дискретный спектр, то оператор* $\hat{R}_1(z)$ *вполне непрерывен для всех* $z\neq 0$, $\operatorname{Im} z\geqslant 0$.

Следствие 1. Из (21) вытекает нетривиальная оценка для функций Бесселя $J_\nu(\lambda x)$: при любых $\delta>0$, $\nu\geqslant 0$, $\lambda>0$

$$\int_0^\infty (1+x)^{-\delta} J_\nu^2(\lambda x)\,dx \leqslant C_2(\delta)\lambda^{-1},$$

где $C_2(\delta)>0$ зависит лишь от $\delta>0$ и $C_2(\delta)\to\infty$ при $\delta\to 0$.

Следствие 2. В пространстве $\mathscr{L}_2(R_n)$ рассмотрим оператор Шредингера $L_3 u=-\Delta u(x)+q(x)u(x)$, $x\in R_n$. Пусть выполнено одно из следующих условий:

1) $q_1(r)=\max\limits_{|x|=r}|q(x)|\in\mathscr{L}(0,\ \infty)$,

2) $q_2(r)=\max\limits_{|x|=r}\left|\dfrac{\partial q(x)}{\partial|x|}\right|\in\mathscr{L}(0,\infty)$, $\quad \lim\limits_{r\to\infty} q_1(r)=0$.

Тогда справедливы заключения теоремы 2 с некоторыми изменениями в формулировках.

Отметим, что п. 1 теоремы 2 для оператора L_3 доказан другим методом при условии $q(x) \underset{|x|\to\infty}{\approx} O(|x|^{-\mu})$, $\mu>1$, в работе [3].

Заметим далее, что оценка (22) позволяет изучить несамосопряженные возмущения операторов L_1 и L_3. Но на этом здесь мы не будем останавливаться.

Теорема 3. *Пусть* $V(x)$ *удовлетворяет условию* 2) *леммы* 2 *и* $V(x)\geqslant 0$. *Тогда для оператора* L_2 *справедливы утверждения теоремы* 2. *Кроме того, справедлива оценка: для любых* $\lambda>0$, $h\in l_2$

$$\int_0^\infty \sum_{k=1}^n p_k x^{-1-p_k}(A_k U(x,\lambda)h,\ U(x,\lambda)h)_{l_2}\,dx \leqslant C_3\sqrt{\lambda}\,\|h\|_{l_2}^2,$$

где $C_3>0$ *не зависит от* λ.

Следствие. В пространстве $\mathscr{L}_2(R_n)\otimes\mathscr{L}_2(R_m)$ рассмотрим оператор $L_4 u=-\Delta_x u-\Delta_y u+[a_1|x|^{-p_1}+a_2|y|^{-p_2}+a_3|x-y|^{-p_3}]u$, где $a\geqslant 0$, $p_i\geqslant 0$, $x\in R_n$, $y\in R_m$. Изучение L_4 сводится к изучению оператора L_2 и для оператора L_4 справедливы заключения теоремы 3 с соответствующими изменениями в формулировках.

Башкирский государственный университет
им. 40-летия Октября
Уфа

Поступило
10 I 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Л. Геронимус, Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке, 1958. [2] А. Я. Повзнер, Математич. сборн., 32 (74), 1, 109 (1953). [3] S. Agmon, Actes Congr. Intern. Matematiciens, 1970, 2, Paris, 1971, p. 679.