Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 6

УДК 519.50+519.56 *МАТЕМАТИКА*

П. К. ОСМАТЕСКУ

T_1-РАВНОМЕРНЫЕ СТРУКТУРЫ

(Представлено академиком П. С. Александровым 15 VI 1973)

В работе на T_1-пространстве вводятся ω-равномерности ($UT_1\omega$), порождающие близость А. В. Архангельского, и Ω-равномерности ($UT_1\Omega$), порождающие классическую близость В. А. Ефремовича, устанавливается существование Ω-равномерности, не являющейся равномерностью Вейля.

Обозначения. Пусть даны покрытия α и β множества X.

a) Покрытие α вписано в покрытие β, если любой элемент $A\in\alpha$ содержится в некотором элементе $B\in\beta$.

b) $\alpha\wedge\beta$ (произведение покрытий α и β) обозначает покрытие, состоящее из попарных пересечений $A\cap B$ всевозможных множеств $A\in\alpha$, $B\in\beta$.

c) $\mathrm{st}_\alpha M$ (звезда множества M относительно покрытия α) есть объединение всех множеств $A\in\alpha$, для которых $A\cap M\neq\emptyset$, $\mathrm{st}_\alpha M=\cup\{A;\ A\cap M\neq\emptyset,\ A\in\alpha\}$.

Определение 1. Пусть X — произвольное множество. Семейство $\mathcal{U}$ покрытий множества X называется UT_1 (T_1-равномерной структурой) множества X, если удовлетворяет аксиомам:

U_0. Если $x, y\in X$, $x\neq y$, то существует $\alpha\in\mathcal{U}$ такое, что $\mathrm{st}_\alpha x\not\ni y$.

U_1. Если $\alpha\in\mathcal{U}$ и α вписано в β, то $\beta\in\mathcal{U}$. Если α, $\beta\in\mathcal{U}$, то $\alpha\wedge\beta\in\mathcal{U}$.

Определение 2. Множество X вместе с T_1-равномерной структурой $\mathcal{U}$ называем T_1-равномерным пространством и обозначаем $(X, \mathcal{U})$.

Определение 3. Множество X называется PT_1 (T_1-пространством близости, или $T_1\delta$-пространством), если для любых его двух подмножеств A и B определено, близки они или нет (в последнем случае будем говорить, что они далеки). Если они близки, условимся писать $\delta(A, B)=0$; если далеки, $\delta(A, B)=1$.

При этом должны выполняться следующие аксиомы:

P_1. $\delta(x, y)=0\Leftrightarrow x=y$.

P_2. $\delta(A, B)=\delta(B, A)$.

P_3. $\delta(A\cup B, C)=\min\{\delta(A, C), \delta(B, C)\}$.

P_4. $\delta(X, \emptyset)=1$.

Аксиома PA. *Если $\delta(A, B)=1$, то найдется подмножество $C\subset X$ такое, что $A\subseteq C$, $B\subset X\setminus C$, $\delta(A, X\setminus C)=1$, и если $\delta(D, B)=0$, где D — произвольное подмножество X, то непременно существуют такие точки $x\in X\setminus C$ в отношении $\delta(D, X)=0$, которые образуют множество, близкое к B.*

Аксиома PE. *Для любых множеств A, $B\subset X$, находящихся в отношении $\delta(A, B)=1$, существуют множества C и D такие, что $C\cup D=X$, $\delta(A, C)=1$, $\delta(B, D)=1$.*

Определение 4. T_1-близость, удовлетворяющая аксиоме PA, называется A-близостью (PT_1A).

A-близость была предложена А. В. Архангельским (определение 1 в ([4])).

Определение 5. T_1-близость, удовлетворяющая аксиоме PE, называется E-близостью (PT_1E).

E-близость была введена В. А. Ефремовичем ([2], [3]).

ω, Ω-равномерности.

Аксиома $U\omega$. *Семейство $\mathcal{U}$ покрытий множества X удовлетворяет следующему условию:*

для произвольного $D \subset X$ образуем

$$H(D)=\{x\in X;\ \mathrm{st}_\mu x\cap D\neq\emptyset \text{ для каждого } \mu\in\mathcal{U}\}.$$

Если $\mathrm{st}_\alpha A\cap B\neq\emptyset$ (где $\alpha\in\mathcal{U}$, A, $B\subset X$), *то существует* $\beta\in\mathcal{U}$, *вписанное в* α, *такое, что как только* $\mathrm{st}_\eta\,(H(D)\setminus\mathrm{st}_\beta A)\cap B=\emptyset$ *для некоторого* $\eta\in\mathcal{U}$, *то* $\mathrm{st}_\gamma D\cap B=\emptyset$ *для некоторого* $\gamma\in\mathcal{U}$.

Аксиома $U\Omega$. *Семейство* $\mathcal{U}$ *покрытий множества* X *удовлетворяет условию: если* $\mathrm{st}_\alpha A\cap B=\emptyset$ (*где* $\alpha\in\mathcal{U}$, A, $B\subset X$), *то существует* $\beta\in\mathcal{U}$, *вписанное в* α, *такое, что* $\mathrm{st}_\beta\,(\mathrm{st}_\beta A)\cap B=\emptyset$.

Аксиома Uw. *Семейство* $\mathcal{U}$ *покрытий множества* X *удовлетворяет условию: для каждого* $\alpha\in\mathcal{U}$ *существует* $\beta\in\mathcal{U}$ *такое, что система* $\{\mathrm{st}_\beta x\}$ *всех точек* $x\in X$ *вписана в* α (*аксиома* $C3$, ([5]), стр. 563).

Определение 6. T_1-равномерность, удовлетворяющая аксиоме $U\omega$, называется ω-равномерностью $(UT_1\omega)$.

Определение 7. T_1-равномерность, удовлетворяющая аксиоме $U\Omega$, называется Ω-равномерностью $(UT_1\Omega)$.

Определение 8. T_1-равномерность, удовлетворяющая аксиоме Uw, называется w-равномерностью (UT_1w).

w-равномерность введена А. Вейлем ([1]).

Предложение 1. *Каждая T_1-равномерность $\mathcal{U}$ порождает однозначно T_1-близость δu.*

Доказательство. Для A, $B\subset X$ положим $\delta(A, B)=0$, если $\mathrm{st}_\alpha A\cap B\neq\emptyset$ для любого $\alpha\in\mathcal{U}$ (ясно, что $\delta(A,\ X\setminus\mathrm{st}_\alpha A)=1$, ибо $\mathrm{st}_\alpha A\cap(X\setminus\mathrm{st}_\alpha A)=\emptyset$).

Теперь проверим аксиомы близости P_1, P_2, P_3, P_4. Аксиомы P_1, P_2, P_4 очевидны. Проверим аксиому P_3. Пусть $\delta(A\cup B, C)=1$, тогда, согласно определенной нами близости, существует $\alpha\in\mathcal{U}$ такое, что $\mathrm{st}_\alpha C\cap(A\cup B)=\emptyset$, отсюда $\delta(A, C)=1$, $\delta(B, C)=1$.

Обратно, пусть $\delta(A, C)=1$, $\delta(B, C)=1$, тогда существуют α, $\beta\in\mathcal{U}$, что $\mathrm{st}_\alpha C\cap A=\emptyset$, $\mathrm{st}_\beta C\cap B=\emptyset$. Покрытие $\alpha\wedge\beta\in\mathcal{U}$ (по аксиоме U_2), поэтому $\mathrm{st}_{\alpha\wedge\beta}C\subset\mathrm{st}_\alpha C\cap\mathrm{st}_\beta C$, значит, $\mathrm{st}_{\alpha\wedge\beta}C\cap(A\cup B)=\emptyset$, т. е. $\delta(A\cup B, C)=1$.

Теорема 1. *UT_1 является $UT_1\omega$ тогда и только тогда, когда порожденная ею PT_1 является PT_1A.*

Необходимость. Согласно предложению 1 UT_1 порождает PT_1 δu. Пусть δu является PT_1A. Возьмем A, $B\subset X$, $\mathrm{st}_\alpha A\cap B=\emptyset$ для некоторого $\alpha\in\mathcal{U}$, т. е. $\delta(A, B)=1$. В силу аксиомы PA существует $C\subset X$, удовлетворяющее аксиоме PA. Так как $\delta(A,\ X\setminus C)=1$, то существует $\gamma\in\mathcal{U}$ такое, что $\mathrm{st}_\gamma A\subset C$; отсюда $\mathrm{st}_{\alpha\wedge\gamma}A\subset C$.

Обозначим $\beta=\alpha\wedge\gamma$, $\beta\in\mathcal{U}$, итак, $\mathrm{st}_\beta A\cap B=\emptyset$ (β вписано в α). Теперь возьмем произвольное $D\subset X$ и образуем

$$H(D)=\{x\in X;\ \mathrm{st}_\mu x\cap D\neq\emptyset \text{ для каждого } \mu\in\mathcal{U}\}.$$

Пусть $\mathrm{st}_\eta\,(H(D)\setminus\mathrm{st}_\beta A)\cap B=\emptyset$ для некоторого $\eta\in\mathcal{U}$, тогда $\mathrm{st}_\gamma D\cap B=\emptyset$ для некоторого $\gamma\in\mathcal{U}$. В самом деле, в противном случае $\mathrm{st}_\gamma D\cap B\neq\emptyset$ для каждого $\gamma\in\mathcal{U}$, т. е. $\delta(M, B)=0$, следовательно, согласно аксиоме PA, существуют $x\in X\setminus C$, $\delta(x, D)=0$, причем $M=\{x\in X\setminus C;\ \delta(x, D)=0\}$ удовлетворяет условию $\delta(M, B)=0$. Множество $M\subset H(D)\setminus\mathrm{st}_\beta A$, поэтому $\delta(H(D)\setminus\mathrm{st}_\beta A, B)=0$, т. е. $\mathrm{st}_\eta\,(H(D)\setminus\mathrm{st}_\beta A)\cap B\neq\emptyset$ для каждого $\eta\in\mathcal{U}$; противоречие. Итак, $\mathrm{st}_\gamma D\cap B=\emptyset$ для некоторого $\gamma\in\mathcal{U}$.

Достаточность. Пусть $\mathcal{U}$ является $UT_1\omega$. Покажем, что δu является PT_1A. В самом деле, пусть $\delta(A, B)=1$ (A, $B\subset X$). Тогда существует $\alpha\in\mathcal{U}$, что $\mathrm{st}_\alpha A\cap B=\emptyset$, поэтому согласно аксиоме $U\omega$ существует $\beta\in\mathcal{U}$, удовлетворяющее условиям аксиомы $U\omega$. Покрытие $\alpha\wedge\beta=\gamma\in\mathcal{U}$, $\mathrm{st}_\gamma A\cap B=\emptyset$.

Теперь возьмем произвольное $D\subset X$, $\delta(D, B)=0$,

$$H(D)=\{x\in X;\ \mathrm{st}_\mu x\cap D\neq\emptyset \text{ для каждого } \mu\in\mathcal{U}\}.$$

Покажем, что $\delta(H(D)\setminus\mathrm{st}_\gamma A, B)=0$. Предположим противное:

$\delta(H(D)\setminus \mathrm{st}_\gamma A,\ B)=1$, тогда существует $\eta\in\mathcal{U}$, что $\mathrm{st}_\eta(H(D)\setminus\mathrm{st}_\gamma A)\cap\cap B=\emptyset$, значит, согласно аксиоме $U\omega$, существует $\nu\in\mathcal{U}$ такое, что $\mathrm{st}_\nu D\cap\cap B=\emptyset$, т. е. $\delta(D,\ B)=1$; противоречие. Итак, $\delta(H(D)\setminus\mathrm{st}_\gamma A,\ B)=0$, т. е. аксиома PA имеет место, значит, δu является PT_1A.

Теорема 2. *UT_1 является $PT_1\Omega$ тогда и только тогда, когда близость δu является PT_1E.*

Необходимость. Пусть δu является PT_1E, $A,\ B\subset X$, $\delta(A,\ B)=1$. Согласно аксиоме PE, существует $C,\ D\subset X$, $C\cup D=X$, $\delta(A,\ C)=1$, $\delta(B,\ D)=1$. Множества $X\setminus C\supset A$, $X\setminus D\supset B$, причем $(X\setminus C)\cap(X\setminus D)=\emptyset$, $X\setminus C\subset D$ $(X\setminus D\subset C)$, $\delta(B,\ X\setminus C)\geqslant\delta(B,\ D)=1$, значит, $\delta(B,\ X\setminus C)=1$, т. е. существует $\gamma\in\mathcal{U}$, что $\mathrm{st}_\gamma(X\setminus C)\cap B=\emptyset$. Далее, $\delta(A,\ C)=1$, т. е. существует $\alpha\in\mathcal{U}$, что $\mathrm{st}_\alpha A\cap C=\emptyset$, откуда $\mathrm{st}_\alpha A\subset X\setminus C$. Следовательно $\mathrm{st}_\gamma(\mathrm{st}_\alpha A)\cap\cap B=\emptyset$, ибо $\mathrm{st}_\gamma(\mathrm{st}_\alpha A)\subset\mathrm{st}_\gamma(X\setminus C)$. Далее $\alpha\wedge\gamma=\beta\in\mathcal{U}$, $\mathrm{st}_\beta A\subset\mathrm{st}_\alpha A$, $\mathrm{st}_\beta(\mathrm{st}_\beta A)\subset\mathrm{st}_\gamma(\mathrm{st}_\alpha A)\subset\mathrm{st}_\gamma(X\setminus C)$, откуда $\mathrm{st}_\beta(\mathrm{st}_\beta A)\cap B=\emptyset$. Итак, аксиома $U\Omega$ имеет место.

Достаточность. Пусть $\mathcal{U}$ есть $UT_1\Omega$, $A,\ B\subset X$, $\alpha\in\mathcal{U}$, $\mathrm{st}_\alpha A\cap B=\emptyset$. Согласно аксиоме $U\Omega$ существует $\beta\in\mathcal{U}$, вписанное в α, такое, что $\mathrm{st}_\beta(\mathrm{st}_\beta A)\cap B=\emptyset$, поэтому $\mathrm{st}_\beta A\cap\mathrm{st}_\beta B=\emptyset$. Кроме того, $X\setminus\mathrm{st}_\beta A=C$, $X\setminus\mathrm{st}_\beta B=D$, $C\cup D=X$, $\delta(A,\ C)=1$, $\delta(B,\ D)=1$, ибо $\mathrm{st}_\beta A\cap C=\emptyset$, $\mathrm{st}_\beta B\cap D=\emptyset$. Итак, множества $C,\ D$ удовлетворяют аксиоме PE.

Следствие. *Если выполняются условия аксиомы $U\Omega$, то выполняются и условия аксиомы $U\omega$.*

Теперь мы покажем, что существует $UT_1\Omega$, не являющаяся UT_1w.

Пусть X — T_1-пространство. Рассмотрим семейство $\mathfrak{M}$ всех открытых покрытий и тех покрытий, в которые вписаны открытые покрытия пространства X.

Семейство $\mathfrak{M}$ является UT_1.

В самом деле,

1) пусть $x,\ y\in X$, $x\neq y$, $\alpha=\{X\setminus x,\ Y\setminus y\}$, тогда $\alpha\in\mathfrak{M}$ и $\mathrm{st}_\alpha x=X\setminus y\not\ni y$;

2) пусть $\beta\in\mathfrak{M}$ и β вписано в покрытие γ, тогда $\gamma\in\mathfrak{M}$ (ибо в γ вписано открытое покрытие, которое вписано в β, или может оказаться, что β — открытое покрытие);

3) $\mu,\ \eta\in\mathfrak{M}$, в покрытия $\mu,\ \eta$ вписаны соответственно некоторые открытые покрытия $\nu,\ \theta$. Покрытие $\nu\wedge\theta\in\mathfrak{M}$ открытое и вписано в $\mu\wedge\eta$, поэтому $\mu\wedge\eta\in\mathfrak{M}$.

Итак, п.п. 1)—3) подтверждают выполнение аксиом U_0, U_1, U_2. Следовательно, $\mathfrak{M}$ является UT_1.

Семейство $\mathfrak{M}$ порождает PT_1A.

Согласно предложению 1, $\mathfrak{M}$ порождает δu. Заметим, что если для $A,\ B\subset X$, $\gamma\in\mathfrak{M}$ имеем $\mathrm{st}_\gamma A\cap B=\emptyset$, то $[A]\cap[B]=\emptyset$ ($[A]$ — замыкание A в пространстве X).

Предположим противное: $[A]\cap[B]\neq\emptyset$. Для любого $\alpha\in\mathfrak{M}$, если оно не открыто, имеется открытое $\mu\in\mathfrak{M}$, вписанное в α. Теперь пусть $x\in[A]\cap\cap[B]$, тогда существует $U\in\mu$, $x\in U$ и $U\cap A\neq\emptyset$, $U\cap B\neq\emptyset$, т. е. $\mathrm{st}_\alpha A\cap B\neq\emptyset$ для любого $\alpha\in\mathfrak{M}$, значит, $\mathrm{st}_\gamma A\cap B\neq\emptyset$; противоречие. Полученное противоречие доказывает $[A]\cap[B]=\emptyset$. Далее, δu такая, что любые два замкнутые непересекающиеся множества далеки. Возьмем $F_1,\ F_2\subset X$ замкнутые ($F_1\cap\cap F_2=\emptyset$), а также покрытие $\alpha=\{X\setminus F_1,\ X\setminus F_2\}$, $\mathrm{st}_\alpha F_1=X\setminus F_2$, $\mathrm{st}_\alpha F_1\cap F_2=\emptyset$, поэтому $\delta(F_1,\ F_2)=1$. Аксиома PA для такой δu выполняется. Итак, δu является PT_1A.

Семейство $\mathfrak{M}$ является $UT_1\omega$.

Так как δu является PT_1A, то согласно теореме 1 $\mathfrak{M}$ является $UT_1\omega$.

Семейство $\mathfrak{M}$ является $UT_1\Omega$, если X — нормальное пространство.

Для δu выполняется аксиома PE. Пусть $A,\ B\subset X$, $\delta(A,\ B)=1$. Согласно показанному выше, $[A]\cap[B]=\emptyset$, т. е. $\delta[A],\ [B])=1$. Так как X — нормальное пространство, то существуют открытые множества $G,\ H\subset X$, $G\supset[A]$, $H\supset[B]$, $G\cap H=\emptyset$, $X\setminus G\supset[B]$, $(X\setminus G)\cap[A]=\emptyset$. Далее, существуют открытые $M,\ N\subset X$, $M\supset[A]$, $N\supset X\setminus G$, $M\cap N=\emptyset$. Обозначим $C=X\setminus M$,

$D=X\setminus N$, имеем $C\cup D=X$, причем $[A]\cap C=\emptyset$, $[B]\cap D=\emptyset$, т. е. $\delta(A, C)=1$, $\delta(B, D)=1$. Итак, δu является PT_1E. Отсюда, согласно теореме 2, семейство $\mathfrak{M}$ является $UT_1\Omega$.

Семейство $\mathfrak{M}$ *не является* UT_1w, *если* X *не паракомпакт.*

Если нормальное T_1-пространство X не паракомпакт, то согласно теореме Стоуна ((6), стр. 80), $\mathfrak{M}$ не является UT_1w.

Обозначения. Пусть Y — расширение пространства X; δu — близость на Y, порожденная равномерностью $\mathcal{U}$; $\mathcal{U}'$ — равномерность на X, индуцируемая равномерностью $\mathcal{U}$ на Y, т. е. $\mathcal{U}'$ состоит из покрытий X, получающихся при пересечении X с покрытиями из $\mathcal{U}$; $\delta'u$ — близость на X, индуцируемая близостью δu; $\delta u'$ — близость на X, порожденная равномерностью $\mathcal{U}'$.

Теорема 3. *Пусть* Y — *расширение* T_1-*пространства* X, $\mathcal{U}$ — T_1-*равномерность* (UT_1) *на* Y. *Тогда* $\delta'u=\delta u'$.

Доказательство. Пусть $A, B\subset X$, $\delta'u(A, B)=1$, другими словами, $\delta u(A, B)=1$, т. е. существует $\alpha\in\mathcal{U}$ такая, что $\mathrm{st}_\alpha A\cap B=\emptyset$, значит, $\mathrm{st}_{\alpha'} A\cap \cap B=\emptyset$ (где $\alpha'=\{U';\ U'=U\cap X,\ U\in\alpha\}$). Следовательно, $\delta u'(A, B)=1$. Наоборот, пусть $A, B\subset X$, $\delta u'(A, B)=1$, т. е. существует $\alpha'\in\mathcal{U}'$ такое, что $\mathrm{st}_{\alpha'} A\cap B=\emptyset$, но $\alpha'=\{U';\ U'=U\cap X,\ U\in\alpha\}$, значит, $\mathrm{st}_\alpha A\cap B=\emptyset$, следовательно, $\delta u(A, B)=1$, отсюда $\delta'u(A, B)=1$.

Следствие. *Любая близость* PT_1A *порождается* $UT_1\omega$.

Действительно, пусть X — T_1-пространство, δ — близость PT_1A на X, совместимая с топологией пространства X. Согласно теореме 6 из (4) близость δ порождает $\omega\alpha$-бикомпактификацию $\omega\alpha X$. Рассмотрим равномерность $\mathfrak{M}$ для $\omega\alpha X$; согласно теореме 3, $\delta'_{\mathfrak{M}}=\delta$.

Кишиневский политехнический
институт

Поступило
15 III 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Weil, Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale, Paris, 1937. [2] В. А. Ефремович, Матем. сборн., **31** (73), № 3, 543 1952). [3] В. А. Ефремович, ДАН, 76, № 3, 341 (1951). [4] П. К. Осматеску, Čech. Math. J., № 1, 193 (1969). [5] Ю. М. Смирнов, Матем. сборн., **31** (73), № 3, 543 (1952). [6] Z. P. Mamuzić, Introduction to General Topology, Noordhoff, 1963.