Доклады Академии наук СССР
1974. Том 214, № 6

УДК 519.2

МАТЕМАТИКА

С. А. ПИРОГОВ

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ I-ГО РОДА ДЛЯ СПИНОВЫХ МОДЕЛЕЙ СО СПИНОМ, ПРИНИМАЮЩИМ ЗНАЧЕНИЯ — 1, 0, 1

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 VI 1973)

В данной заметке результаты ([1]) о существовании фазового перехода I-го рода для некоторых спиновых моделей со спином, принимающим значения ± 1, переносятся на спиновые модели со спином, принимающим значения $-1, 0, 1$.

1. Решетчатые спиновые модели.

Пусть Z^ν, $\nu \geqslant 2$, — ν-мерная целочисленная решетка. Отображения s: $Z^\nu \to \{-1, 0, +1\}$ называются конфигурациями ν-мерной спиновой системы со значениями спина $-1, 0, 1$. Пусть задана функция на пространстве конфигураций $\Phi(s)$, зависящая только от значений s_k при $|k| \leqslant R$. Мы будем называть $\Phi(s)$ потенциалом взаимодействия спиновой модели, а $2R$ — диаметром взаимодействия. Для двух конфигураций s и s', совпадающих всюду, кроме конечного числа точек решетки, определим энергию s относительно s' формулой

$$H(s|s') = \sum_{t \in Z^\nu} (\Phi(T_t s) - \Phi(T_t s')),$$

где $(T_t s)_i = s_{i+t}$. В последней сумме только конечное число слагаемых отлично от нуля.

Допустим, что для конечного множества $V \subset Z^\nu$ фиксирована часть конфигурации $\bar{s}$ вне V, $\bar{s} = \{\bar{s}_i,\ i \notin V\}$. Следуя Добрушину (см. ([7])), будем называть распределение вероятностей на множестве всех конфигураций, совпадающих с $\bar{s}$ при $i \notin V$, распределением Гиббса в объеме V с граничными условиями $\bar{s}$ вне V, если для любых двух таких конфигураций s', s''

$$p(s')/p(s'') = \exp(-\beta H(s'|s''));$$

здесь β — параметр, называемый обратной температурой.

2. Модели Пайерлса. Для конечного множества $V \subset Z^\nu$ рассмотрим конфигурацию спинов s^+ (s^-) на решетке, для которой $s_i = +1$ (-1) при $i \notin V$. Такие конфигурации мы будем называть конфигурациями в объеме V с чистыми граничными условиями ($+1$) или (-1). Через ($+1$) ((-1)) будем обозначать конфигурации на решетке, для которых $s_i = +1$ (-1). Как и для модели Изинга (см. ([5], [6])), свяжем с каждой точкой решетки единичный куб с центром в этой точке. Грань, разделяющую соседние кубы i и j, $|i-j| = 1$, такие, что $s_i s_j = -1$, назовем гранью границы. Куб i такой, что $s_i = 0$, назовем кубом границы. Объединение граней границы и кубов границы назовем границей Γ конфигурации s^+ (s^-). Число граней и кубов границы обозначим $|\Gamma|$. Назовем решетчатую спиновую модель с потенциалом Φ пайерлсовской, если для любой конфигурации s^+ (любой конфигурации s^-) в

конечном объеме V с чистыми граничными условиями $(+1)$ $((-1))$

$$H(s^+|(+1))\geqslant\alpha|\Gamma|, \quad H(s^-|(-1))\geqslant\alpha|\Gamma|,$$

где $\alpha>0$ *.

В дальнейшем потенциал $\Phi(s)$ будем считать включением в однопараметрическое семейство потенциалов

$$\Phi_h(s)=\Phi(s)+hs_0,$$

где h имеет смысл внешнего поля.

Основной результат данной заметки заключается в следующем утверждении.

Теорема 1. *Для любой пайерлсовской модели существует постоянная β_0, зависящая только от α, R и размерности ν, и функция $h(\beta)$, определенная при всех $\beta>\beta_0$, такая, что при значениях параметров β, $h=h(\beta)$, имеет место фазовый переход I-го рода по h и неединственность предельного распределения Гиббса.*

Доказательство теоремы 1 основано, как и в [1], на исследовании вероятностей некоторых компонент границы, которые мы сейчас введем.

Связные компоненты границы конфигурации назовем циклами. Два цикла Γ_1, Γ_2 называются связанными, если $\operatorname{dist}(\Gamma_1, \Gamma_2)\leqslant 2R$, где $2R$ — диаметр взаимодействия. Цепочка циклов $B=\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r\}$ называется стеной, если циклы Γ_i, Γ_{i+1} связаны, $i=1, \ldots, r-1$, и цепочку B нельзя расширить с сохранением этого свойства. Граница всякой конфигурации с чистыми ($(+1)$ или (-1)) граничными условиями однозначно разлагается на стены, причем если B и B' — различные стены границы, то $\operatorname{dist}(B, B')>2R$.

Теорема 1 выводится из следующей основной леммы.

Лемма 1. *Для любой пайерлсовской модели существуют постоянная β_1, зависящая только от α, R и размерности ν, и функция $h(\beta)$, определенная при всех $\beta>\beta_1$ и обладающая следующим свойством: для распределения Гиббса с параметрами β, $h=h(\beta)$, в конечном объеме V с чистыми граничными условиями $(+1)$ или (-1) вне V вероятность того, что данная стена B является стеной границы конфигурации, не превосходит $\exp(-(\alpha\beta-2)|B|)$.*

Таким образом, для вероятности того, что данная стена является стеной границы, имеет место оценка типа Пайерлса (см. [6, 7]).

3. Построение контуров. Доказательство леммы 1, как и доказательство основной теоремы работы [1], основано на исследовании цепочки рекуррентных уравнений для статсумм (см. [1]). Поскольку, однако, не существует способа естественно определить внутренность и внешность стены, приходится ввести понятие контура следующим образом.

Пусть s — конфигурация в объеме V с граничными условиями $(+1)$, граница которой состоит из единственной стены B, а $-s$ — конфигурация в объеме V с граничными условиями (-1), получающаяся из s преобразованием $s_i\to -s_i$. Пара $\Gamma=\{s, -s\}$ называется контуром в объеме V, а стена B — носителем этого контура. Легко показать, что существует не более $2^{|B|}$ разных контуров с одним и тем же носителем B. Объединение кубов, занятых -1 в конфигурации s, называется внутренностью Γ ($\operatorname{Int}\Gamma$), а объединение кубов, занятых $+1$,— внешностью Γ ($\operatorname{Ext}\Gamma$).

Если t — конфигурация в объеме V с чистыми граничными условиями $(+1)$ или (-1), то каждая стена границы t является носителем естественно определенного контура. Обратно, если заданы чистые граничные ус-

---

* Нетрудно показать, что множество (вполне периодических) основных состояний (см. [8]) для пайерлсовской модели состоит из двух элементов: $(+1)$ и (-1). Вероятно, верно и обратное: модель, для которой основные состояния суть только $(+1)$ и (-1), является пайерлсовской. Однако это утверждение не доказано.

ловия $(+1)$ или (-1) вне объема V, то каждому набору контуров $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ в объеме V таких, что $\operatorname{dist}(B_i, B_j) > 2R$ для любых $i \neq j$, где B_i — носитель Γ_i, соответствует единственная конфигурация. Следуя [1], определим энергию $\Phi^{\pm}(\Gamma)$ контура Γ с граничными условиями $(+1)$ или (-1). А именно, пусть $\Gamma = \{s, -s\}$. Энергией контура Γ при граничных условиях $(+1)$ $((-1))$ называется $\Phi^{\pm}(\Gamma) = H(\pm s | (\pm 1))$, где энергия $H(s|s')$ соответствует данному потенциалу взаимодействия $\Phi(s)$.

Если Φ — потенциал пайерлсовской модели, то $\Phi^{\pm}(\Gamma) \geqslant \alpha |\Gamma|$, где, по определению, $|\Gamma| = |B|$, B — носитель Γ.

Далее $\Phi_h^{\pm}(\Gamma)$ записывается в виде $\psi_h^{\pm}(\Gamma) \mp 2hV(\Gamma)$, где $\|\psi_h^{\pm}\| < \infty$, $\|\psi_h^{\pm} - \psi_{h'}^{\pm}\| \leqslant |h - h'|$ (норма функционала определяется, как в [1]), а $V(\Gamma)$ — объем $\operatorname{Int} \Gamma$.

Как и в [1], контур Γ границы конфигурации называется *внешним*, если он не лежит во внутренности никакого другого контура границы. Статистические суммы $\Xi^{\pm}(\Gamma | \beta, h)$ определяются так же, как и в [1].

Из определения следует, что статсуммы $\Xi^{\pm}(\Gamma | \beta, h)$ удовлетворяют цепочке рекуррентных уравнений, совпадающих по форме с рекуррентными уравнениями работы [1]. Результаты о контурных моделях, использованные в [1], переносятся на контурные модели, у которых контуры определены, как и в данной заметке.

Исследование рекуррентных уравнений проводится по тому же плану, что и в [1], с учетом того, что теперь $\psi_h^{\pm}$ зависит от h.

Замечание. Если пайерлсовская модель такова, что $\Phi^+(\Gamma) = \Phi^-(\Gamma)$, то $h(\beta) = 0$. В этом случае неединственность предельного распределения Гиббса (и фазовый переход I-го рода по h) при $\beta > \beta_0$ легко доказываются применением обычных рассуждений, основанных на преобразовании, уничтожающем данный контур [5-7]. Несколько таких моделей рассмотрено в работе [4]. Для некоторых моделей со спином, принимающим три значения, удается доказать существование трех предельных распределений Гиббса, ни одно из которых не является выпуклой комбинацией двух других. Для этих моделей рассматриваются конфигурации спинов s в конечном объеме V с чистыми граничными условиями одного из трех типов (-1), (0), $(+1)$ вне V. *Границей конфигурации* называется объединение граней, разделяющих соседние кубы i, j такие, что $s_i \neq s_j$. Доказательство утверждения, приведенного выше, основано на подходящем преобразовании, уничтожающем данную стену границы (определения циклов и стен аналогично использованному в данной заметке). Исследовать структуру множества предельных распределений Гиббса для малых возмущений таких моделей пока не удается.

В заключение хочу поблагодарить Я. Г. Синая за постоянное внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
29 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Пирогов, Я. Г. Синай, Функц. анализ, 8, № 1 (1974). [2] Р. А. Минлос, Я. Г. Синай, Тр. Московск. матем. общ., 19, 113 (1968). [3] Р. А. Минлос, Я. Г. Синай, Тр. Московск. матем. общ., 17, 213 (1967). [4] J. L. Lebowitz, G. Gallavotti, J. Math. Phys., 12, № 7, 1129 (1971). [5] Р. Л. Добрушин, Теория вероятн. и ее применения, 10, в. 2, 209 (1965). [6] R. B. Griffiths, Phys. Rev., A136, 437 (1964). [7] Р. Л. Добрушин, Функц. анализ, 2, в. 4, 44 (1968). [8] Б. М. Герцик, Р. Л. Добрушин, Функц. анализ, 8, № 2 (1974).