Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 4

УДК 513.83;517.948:513.8+519.4 *МАТЕМАТИКА*

А. И. ВЕКСЛЕР

# $P'$-ТОЧКИ, $P'$-МНОЖЕСТВА, $P'$-ПРОСТРАНСТВА. НОВЫЙ КЛАСС ПОРЯДКОВО-НЕПРЕРЫВНЫХ МЕР И ФУНКЦИОНАЛОВ

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 15 II 1973)*

1. Как известно, замкнутое множество $F$ во вполне регулярном (иные в заметке не рассматриваются) пространстве $T$ называется $P$-множеством, если оно содержится во внутренности любого $G_\delta$-множества $E\supset F$. Одноточечное $P$-множество называется $P$-точкой [10]. Пространство, сплошь состоящее из $P$-точек, называется $P$-пространством.

Изучению $P$-точек и $P$-пространств посвящена довольно большая литература, частично нашедшая отражение в [9]. $P$-множества изучались значительно меньше [2–7, 11, 15]. При этом $P$-множества в достаточно общих пространствах, именно в произвольных бикомпактах, изучались лишь в [7]. Естественным обобщением приведенных выше понятий являются следующие, на наш взгляд, достаточно интересные и полезные.

Определения 1. Замкнутое $\Phi\subset T$ называется $P'$-множеством, если оно содержится в замыкании внутренности любого $G_\delta$-множества $E\supset\Phi$. Одноточечное $P'$-множество называется $P'$-точкой, а пространство, сплошь состоящее из $P'$-точек,— $P'$-пространством.

Мы для простоты будем рассматривать только бикомпактные пространства и $B$ всюду будет обозначать бикомпакт (сразу заметим, что класс бикомпактных $P'$-пространств, в отличие от более узкого класса бикомпактных $P$-пространств, включающего лишь конечные пространства, достаточно велик; см. ниже). Для этого случая в определении $P'$-множества достаточно ограничиться замкнутыми $G_\delta$-множествами (т. е. нуль-множествами) $E\supset F$.

В п. 2 изучаются $P'$-пространства и пространства непрерывных функций на них, в пп. 3, 4 — $P'$-множества. Изучение $P'$-множеств привело к новым понятиям усиленно $(o)$-непрерывных мер и усилению $(o)$-линейных функционалов. Они рассматриваются в п. 5.

Будем $\theta$-множеством называть всякое нигде не плотное (н.н.п.) нуль-множество.

2. Теорема 1. *Для бикомпакта $B$ равносильны утверждения*: 1) $B - P'$*-пространство*; 2) *в $B$ нет непустых $\theta$-множеств*; 3) *в $B$ всякое конуль-множество регулярно (т. е. канонически открыто)*; 4) *замыкание незамкнутого конуль-множества в $B$ не может быть нуль-множеством*; 5) *если $G_n$ — открытые регулярные множества в $B$ и $\overline{G}_n\subset G_{n+1}$, $n\in N$, то $\cup G_n$ регулярно.*

Примерами бикомпактных $P'$-пространств являются стоун-чеховский нарост $\beta T\diagdown T$ всякого локально-бикомпактного, вещественно-компактного, или даже полного относительно некоторой равномерности $T$ (ибо в $\beta T\diagdown T$ нет непустых $\theta$-множеств; см. [12, 14]); $\beta D\diagdown D$ для дискретного $D$; александровская (одноточечная) бикомпактификация $\alpha D$ для несчетного $D$. Класс бикомпактных $P'$-пространств замкнут относительно взятия суммы или произведения конечного числа пространств и относительно перехода к неприводимым образам. В то же время (в отличие от случая $P$-пространств) непрерывный образ $P'$-пространства, а также его замкнутое (и даже регулярное замкнутое) подмножество не обязаны быть $P'$-пространствами. Отметим еще, что если $B - P'$-пространство, а $\{t_\gamma\}$, $\gamma\in\Gamma$,—

произвольный набор изолированных точек из $B$, то «вставляя» вместо каждой $t_\gamma$ какое-нибудь $P'$-пространство $B_\gamma$, получаем новое $P'$-пространство.

Перейдем к векторно-структурным характеристикам $P'$-пространств.

Лемма. *Точка $t \in B$ — $P'$-точка $\Leftrightarrow$ точечный функционал $f_t(x) = x(t)$ $(o)$-линеен в векторной структуре $X = C(B)$.*

Теорема 2. *Для бикомпакта $B$ равносильны утверждения:* 1) *$B$ — $P'$-пространство;* 2) *в $X = C(B)$ всякий $(b)$-линейный функционал $(o)$ линеен;* 3) *если* $\inf x_n = 0$ *в $X$, то* $\inf\{x_n(t)\} = 0$ $\forall t \in B$; 4) *в $X$ $(o)$-сходимость последовательности совпадает с равномерной (и значит, со сходимостью с регулятором* ([8])); 5) *в $X$ выполнена теорема о диагональной последовательности (и в частности, имеет место свойство Егорова);* 6) *всякая монотонная норма в $X$ непрерывна, т. е. для нее выполнено условие* (A) *Л. В. Канторовича* (([8]), *гл.* VII, § 6).

Замечание. Приведем еще некоторые утверждения, равносильные 1)—6): 7) в $X$ всякий точечный функционал $(o)$-линеен; 8) в $X$ $(o)$-сходящаяся последовательность сходится поточечно на $B$; 9) в $X$ $(*)$-сходимость (т. е. звездная сходимость в смысле П. С. Александрова — П. С. Урысона ([1]) по отношению к $(o)$-сходимости) последовательности влечет ее поточечную сходимость; 10) для любой монотонной нормы в $X$ $(b)$-сходящаяся последовательность сходится поточечно.

Поскольку, как известно, для бесконечномерного $K_\sigma$-пространства ограниченных элементов условия 4) или 5) выполняться не могут, бесконечный квазиэкстремально-несвязный (базисно-несвязный) бикомпакт не может быть $P'$-пространством (факт почти очевидный и сам по себе).

Пусть $B$ — $P'$-пространство без изолированных точек. Тогда в банаховой структуре $X = C(B)$ выполнено условие (A) Л. В. Канторовича, но условие (A$'$) не выполнено ни на каком ненулевом $l$-идеале. Первый пример такого рода был сложным путем построен в ([16]).

Теорема 3. *Для бикомпактного $P'$-пространства $B$ выполнены следующие утверждения:* а) *если $B$ бесконечно, то оно не удовлетворяет условию Суслина;* б) *в $B$ всякое замкнутое множество есть $P'$-множество;* в) *если $|B| > 1$, то в $B$ есть $P$-множество, отличное от $\phi$ и $B$;* г) *если в $B$ нет изолированных точек, то в нем есть $P$-множество, не являющееся открыто-замкнутым;* д) *если $B$ имеет базис мощности $\aleph_1$, то в $B$ есть $P$-точки.*

Последнее утверждение обобщает известный результат У. Рудина ([13]) о том, что в $\beta N \setminus N$ в предположении CH (она гарантирует существование нужного базиса) имеются $P$-точки.

3. Теорема 4. *Для замкнутого $\Phi \subset B$ равносильны утверждения:* 1) *$\Phi$ — $P'$-множество;* 2) *след на $\Phi$ всякого $\theta$-множества — $\theta$-подмножество в $\Phi$ (т. е. $\theta$-множество в $\Phi$ в относительной топологии);* 3) *если $G$ открытое регулярное и $G \cap \Phi \neq \phi$, то $\overline{G} \cap \Phi$ не погружается в $\theta$-множество;* 4) *то же для любого открытого $G$.*

Следующий результат, дающий векторно-структурную характеристику $P'$-множеств, в полном объеме впервые был доказан Г. Я. Ивановой.

Теорема 5. *Замкнутое $\Phi \subset B$ является $P'$-множеством $\Leftrightarrow$ $l$ — идеал* $I_\Phi = \{x \in C(B) : x(\Phi) \equiv 0\}$ *$\sigma$-замкнут, т. е. если* $\{x_n\} \subset I_\Phi$ *и* $x = \sup x_n$, *то* $x \in I_\Phi$.

Предложение 1. *В бикомпакте $B$ выполнены утверждения:* а) *если $\Phi_\gamma$ — $P'$-множества, $\gamma \in \Gamma$, то $\overline{\cup \Phi_\gamma}$ — тоже $P'$-множество;* б) *во всяком замкнутом $F \subset B$ содержится наибольшее $P'$-множество;* в) *совокупность всех $P'$-множеств — полная структура, являющаяся полной верхней подполуструктурой (но не обязательно, подструктурой! даже для отрезка) в структуре всех замкнутых множеств в $B$.*

Предложение 2. *Всякое $P'$-множество представимо в виде объединения замкнутого регулярного (а оно всегда $P'$-множество) и н.н.п. $P'$-множества.*

Теорема 6. *В бикомпакте $B$ имеется $P'$-множество, не являющееся регулярным* $\Leftrightarrow B$ *не удовлетворяет условию Суслина.*

Теорема 7. *Если $F$ — $P'$-множество в $B$, а $\Phi$ — $P'$-подмножество в $F$, то $\Phi$ — $P'$-множество в $B$.*

Теорема 8. *Для $P'$-множества $\Phi\subset B$ выполнены утверждения:* а) $\Phi\neq\phi$ *не погружается в объединение последовательности* $\theta$-*множеств из* $B$; б) *в то же время, если* $\cup\{F_n\colon n\in N\}$ *плотно в* $B$, *то* $\cup\{F_n\cap\Phi\}$ *плотно в* $\Phi$.

Теоремы 6—8 можно в некотором смысле рассматривать в качестве перенесений и обобщений соответствующих результатов из [6, 7] о $P$-множествах в произвольных либо квазиэкстремально-несвязных бикомпактах (в последних классы $P$-множеств и $P'$-множеств совпадают). Другие свойства $P$-множеств [6, 7] на $P'$-множества не переносятся. Например, н.н.п. $P'$-множество, в отличие от н.н.п. $P$-множества, может целиком содержать непустое $\theta$-множество из $B$.

4. Определения 2. Будем говорить, что замкнутое $\Phi\subset B$ является **наследственным $P'$-множеством** (**слабо наследственным $P'$-множеством**), если $\Phi\cap F$ — $P'$-подмножество в $F$ для любого замкнутого $F$ (если $\Phi$ — $P'$-подмножество в любом замкнутом $F\supset\Phi$). Если рассматривается не любое $F$, а лишь $F$ из некоторого класса замкнутых множеств, содержащего $B$, то будем говорить, что $\Phi$ — наследственное (слабо наследственное) в данном классе $P'$-множество.

Теорема 9. *Для замкнутого $\Phi\subset B$ равносильны утверждения:* 1) $\Phi$ — *$P$-множество*; 2) $\Phi$ — *наследственное $P'$-множество*; 3) $\Phi$ — *наследственное в классе замкнутых регулярных множеств $P'$-множество.*

Определения 3. Замкнутое $\Phi\subset B$ будем называть **$P_+'$-множеством** (понятие промежуточное между понятиями $P$-множества и $P'$-множества), если $\operatorname{Int}\overline{Z\cap\Phi}=\Phi$ для любого нуль-множества $Z\supset\Phi$.

Теорема 10. *Для замкнутого $\Phi\subset B$ равносильны утверждения:* 1) $\Phi$ — *$P_+'$-множество*; 2) $\Phi$ — *слабо наследственное $P'$-множество*; 3) $\Phi$ — *слабо наследственное в классе $P'$-множеств $P'$-множество*; 4) $\Phi$ *является $P_+'$-подмножеством в любом $F\supset\Phi$.*

Теорема 11 (ср. с теоремой 4). *Для замкнутого $\Phi\subset B$ равносильны утверждения:* 1) $\Phi$ — *$P_+'$-множество*; 2) *след на $\Phi$ границы любого нуль-множества $Z\supset\Phi$ есть н.н.п. подмножество в $\Phi$*; 3) *то же без требования $Z\supset\Phi$*; 4) *если $G$ — открытое регулярное и $G\cap\Phi\neq\phi$, то $\overline{G}\cap\Phi$ не погружается в границу никакого нуль-множества из $B$*; 5) *то же для любого открытого $G$.*

Отсюда вытекает, например, что всякая непустая граница нуль-множества в $P'$-пространстве есть $P'$-множество, не содержащее непустых $P_+'$-множеств из $B$ и, в частности, $P$-точек (очевидно, понятие $P_+'$-точки равносильно понятию $P$-точки).

Очевидно, предложение 1 переносится на случай $P_+'$-множеств. Поскольку, как известно [7], множество $\cup\Phi_\gamma$, где все $\Phi_\gamma$ — $P$-множества, не обязаны быть $P$-множеством, мы тем самым получаем большой класс собственно $P_+'$-множеств.

5. Определения 4. Положительный (соответственно регулярный) функционал $f$ в векторной структуре $X$ будем называть **усиленно $(o)$-линейным**, или **$(o^+)$-линейным**, если для любой последовательности $0\leqslant x_n\downarrow$ элементов $X$ найдется последовательность $0\leqslant y_n\uparrow$ такая, что $y_n\leqslant x_n$ и $\sup\{f(y_n)\}=\inf\{f(x_n)\}$ (соответственно если он представим в виде разности двух $(o^+)$-линейных положительных).

Определения 5. Регулярную борелеву меру $\mu$ на бикомпакте $B$ будем называть **$(o)$-непрерывной** (**усиленно $(o)$-непрерывной**, или **$(o^+)$-непрерывной**), если $(o)$-линеен ($(o^+)$-линеен) порожденный ею на $C(B)$ функционал $f(x)=\int\limits_B x(t)\,d\mu$.

Теорема 12. *Регулярная борелева мера* $\mu$ $(o^+)$*-непрерывна* $\Leftrightarrow \mu$ *аннулируется на границах всех нуль-множеств.*

Напомним, что $\mu$ $(o)$-непрерывна $\Leftrightarrow \mu$ аннулируется на всех $\theta$-множествах.

Следствие. *Носитель* $(o)$*-непрерывной* ($(o^+)$*-непрерывной*) *меры — $P'$-множество* ($P_+'$*-множество*).

Теорема 13. *Для регулярной борелевой меры* $\mu$ *равносильны утверждения*: 1) $\mu$ $(o^+)$*-непрерывна*; 2) $\mu$ *наследственно* $(o)$*-непрерывна, т. е.* $(o)$*-непрерывен ее след на всяком замкнутом* $F$; 3) $\mu$ *слабо наследственно непрерывна, т. е.* $(o)$*-непрерывен ее след на всяком замкнутом* $F \supset \operatorname{supp} \mu$; 4) $(o)$*-непрерывен след* $\mu$ *на всяком замкнутом регулярном* $F \supset \operatorname{supp} \mu$.

Теорема 14. *Регулярный* $f$ $(o^+)$*-линеен* $\Leftrightarrow$ *для любой ограниченной* $x_n \downarrow$ *найдется* $y_n \uparrow$ *такая, что* $y_n \leqslant x_n$ *и для всякой* $z_n \uparrow$, *для которой* $y_n \leqslant z_n \leqslant x_n$, *существует* $\lim f(z_n) = \lim f(x_n)$.

Теорема 15. *Совокупность всех* $(o^+)$*-линейных функционалов в векторной структуре* $X$ *является компонентой (полосой) в пространстве всех регулярных функционалов в* $X$, *содержащейся между компонентами всех* $(o)$*-линейных и всех вполне линейных функционалов в* $X$.

Пусть $\varphi$ — (векторно-структурный) гомоморфизм векторной структуры $X$ на векторную структуру $Y$. Тогда всякому регулярному на $X$ функционалу $f$ естественным образом сопоставляется регулярный на $Y$ функционал $f_\varphi$. Для $f \geqslant 0$ соответствие выглядит так: если $y \geqslant 0$, то $f_\varphi(y) = \inf\{f(x): \varphi(x) = y, x \geqslant 0\}$.

Теорема 16. *Пусть* $X$ *— архимедова векторная структура,* $f$ *— регулярный функционал на* $X$. *Равносильны утверждения*: 1) $f$ *усиленно* $(o)$*-линеен*: 2) *образ* $f$ *— функционал* $f_\varphi$ $(o)$*-линеен при любом гомоморфизме* $\varphi$; 3) *образ* $f$ $(o)$*-линеен при любом* $\sigma$*-гомоморфизме* $\varphi$, *для которого* $f(\varphi^{-1}0) = 0$; 4) (*только для случая* $X = C(B)$) *образ* $f$ $(o)$*-линеен при любом гомоморфизме* $X$ *вида* $X | X'$, *где* $X'$ *— произвольная компонента в* $X$ *и* $f(X') = 0$.

Теорема 17. *Пусть* $f \geqslant 0$ $(o)$*-линейный функционал на архимедовой* $X$, $\sigma X$ *—* $\sigma$*-пополнение* $X$, *т. е. наименьшее* $K_\sigma$*-пространство, содержащееся между* $X$ *и его* $K$*-пополнением по Дедекинду — Клиффорду — Юдину. Равносильны утверждения*: 1) $f$ $(o^+)$*-линеен*; 2) $f$ *имеет единственное положительное распространение на* $\sigma X$; 3) *все положительные распространения* $f$ *на* $\sigma X$ $(o)$*-линейны.*

Понятие $(o^+)$-линейности и соответствующие результаты могут быть обобщены со случая функционалов на случай операторов.

Ленинградский институт текстильной и
легкой промышленности
им. С. М. Кирова

Поступило
7 II 1973

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров, П. С. Урысон, С. R., 177, 1274 (1923). [2] R. Atalla, Proc. Am. Math. Soc., 26, № 3, 437 (1970). [3] R. Atalla, Notices Am. Math. Soc., 18, № 5, 71T–G 156 (1971). [4] R. Atalla, Proc. Am. Math. Soc., in press. [5] R. Atalla, Proc. Am. Math. Soc., 37, № 1 (1973). [6] А. И. Векслер, ДАН, 193, № 3 510 (1970). [7] А. И. Векслер, З. Т. Диканова, Геометрия и топология (Всероссийск. сборн. Лен. гос. пед. инст. им. А. И. Герцена, 1, 1973. [8] Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, 1961. [9] L. Gillman, M. Jerison, Rings of Continuous Functions, 1960. [10] L. Gillman, M. Henriksen, Trans. Am. Math. Soc., 77, № 2, 340 (1954). [11] З. Т. Диканова, Сиб. матем. журн., 9, № 4, 804 (1968). [12] S. M. Robinson, Fund. Math., 64, 335 (1969). [13] W. Rudin, Duke Math. J., 23, № 3, 409 (1956). [14] N. J. Fine, L. Gillman, Bull. Am. Math. Soc., 66, № 5, 376 (1960). [15] M. Henriksen, J. Isbell, Notices Am. Math. Soc., 11, № 1, 90 (1964). [16] J. A. R. Holbrook, Proc. Nederl. Akad. Wet., A70, № 2, 212 (1967).