Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 4

УДК 519.4:517:513.88

МАТЕМАТИКА

А. И. ЛОГИНОВ, В. С. ШУЛЬМАН

О НАСЛЕДСТВЕННОЙ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ РЕФЛЕКСИВНОСТИ W^*-АЛГЕБР

(Представлено академиком С. М. Никольским 19 II 1973)

1. Пусть H — гильбертово пространство, $B(H)$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов в H, R — слабо замкнутое подпространство в $B(H)$. R называется рефлексивным (см. ([4])), если

$$R=\{A\in B(H):\ Ax\in\overline{Rx}\quad \forall x\in H\}.$$

Рефлексивное подпространство R назовем наследственно рефлексивным, если рефлексивно всякое слабозамкнутое подпространство $S\subset R$.

В работе ([1]) доказано, что слабозамкнутые подалгебры коммутативных W^*-алгебр рефлексивны. В ([2]) были приведены примеры некоммутативных W^*-алгебр, все слабозамкнутые подалгебры которых рефлексивны, и поставлена задача об описании совокупности W^*-алгебр, обладающих таким свойством. Фактически оказалось, что коммутативные W^*-алгебры, так же как и алгебры, приведенные в ([2]), обладают более сильным свойством: они наследственно рефлексивны. Во втором разделе настоящей заметки приведен ряд результатов о наследственно рефлексивных подпространствах в $B(H)$, наиболее важный из которых состоит в следующем: счетно-разложимая W^*-алгебра наследственно рефлексивна тогда и только тогда, когда у нее есть разделяющий вектор.

Пусть R — W^*-алгебра, $\mathfrak{A}$ — ее W^*-подалгебра. Слабозамкнутое подпространство $S\subset R$ назовем $\mathfrak{A}$-модулем, если $\mathfrak{A}S\mathfrak{A}\subset S$. Если все $\mathfrak{A}$-модули в R рефлексивны, то пару $(\mathfrak{A}, R)$ будем называть промежуточно рефлексивной. В третьем разделе мы рассматриваем задачу об условиях промежуточной рефлексивной пары $(\mathfrak{A}, R)$. Ясно, что при $\mathfrak{A}=\{\lambda 1\}$ промежуточная рефлексивность сводится к наследственной рефлексивности алгебры R. Известная гипотеза (см. ([2])) о рефлексивности слабозамкнутых алгебр, содержащих m.a.s.a. (максимальная абелева симметричная алгебра), эквивалентна, как следует из ([4]), гипотезе о промежуточной рефлексивности пары $(\mathfrak{A}, R)$, где $R=B(H)$, $\mathfrak{A}$ — m.a.s.a. в R. Другие частные случаи задачи об условиях промежуточной рефлексивности рассматривались в ([4]) и ([5]). Хотя основные результаты настоящей работы относятся к случаю, когда R конечна либо $\mathfrak{A}$ атомична над центром R, некоторые из результатов (теоремы 3 и 5) носят более общий характер.

2. Линейный функционал на подпространстве $R\subset B(H)$ вида $\varphi(A)=(Ax, y)$, где $A\in R$, $x, y\in H$, назовем векторным.

Теорема 1. *Для того чтобы подпространство $R\subset B(H)$ было наследственно рефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы R было рефлексивным и всякий слабонепрерывный линейный функционал на R был векторным.*

Следствие 1.1 (теорема Сарозона). *Всякая коммутативная W^*-алгебра наследственно рефлексивна.*

Следствие 1.2. *Если подпространство $R\subset B(H)$ рефлексивно и его коммутант R' имеет строго циклический вектор* (т. е. *такой вектор $x\in H$, что $R'x=H$*), *то подпространство R наследственно рефлексивно.*

В работе ([6]) было доказано, что полупростая коммутативная алгебра, имеющая строго циклический вектор, рефлексивна. Используя следствие 1.2, этот результат можно усилить:

Следствие 1.3. *Полупростая коммутативная алгебра, имеющая строго циклический вектор, наследственно рефлексивна.*

Пусть R — W^*-алгебра, R' — ее коммутант. Вектор $x \in H$ называется разделяющим для R, если из $Ax=0$, $A \in R$ следует $A=0$. Проектор $p \in R$ называется циклическим, если существует вектор $x \in H$ такой, что $pH=\overline{R'x}$. Множество циклических проекторов алгебры R мы обозначим $C(R)$.

Теорема 2. *Для того чтобы W^*-алгебра была наследственно рефлексивной, необходимо и достаточно, чтобы всякий ее счетно-разложимый проектор был циклическим.*

Следствие 2.1. *Счетно-разложимая W^*-алгебра наследственно рефлексивна тогда и только тогда, когда она обладает разделяющим вектором.*

Следствие 2.2. *Если коммутант W^*-алгебры собственно бесконечен, то она наследственно рефлексивна, в частности, всякая алгебра типа* III *наследственно рефлексивна.*

Оператор $A \in B(H)$ называется рефлексивным ([9]), если порожденная им слабозамкнутая алгебра рефлексивна, и типа III, если порожденная им W^*-алгебра типа III.

Следствие 2.3. *Всякий оператор типа* III *рефлексивен.*

Следствие 2.4. *Если бесконечная W^*-алгебра имеет конечный коммутант, то она содержит нерефлексивную слабозамкнутую подалгебру.*

Следствие 2.5. *Пусть R — счетно-разложимая W^*-алгебра, p и q — проекторы из R. Алгебра pRq наследственно рефлексивна тогда и только тогда, когда существует такой центральный проектор $z \in R$, что проекторы zp и $(1-z)q$ цикличны.*

3. Везде ниже R — W^*-алгебра, $\mathfrak{A}$ — ее W^*-подалгебра, Z — центр алгебры R. Для простоты изложения предположим дополнительно, что R счетно-разложима.

Теорема 3. *Если $\mathfrak{A}$ — коммутативна и пара $(\mathfrak{A}, R)$ промежуточно рефлексивна, то алгебра $\mathfrak{A}' \cap R$ имеет разделяющий вектор.*

Ненулевой проектор $p \in \mathfrak{A}$ назовем Z-минимальным, если $p\mathfrak{A}p \subset pZ$. Если $R=B(H)$, то наше определение Z-минимальности совпадает с обычным определением минимальности. Если $\mathfrak{A}=R$, то Z-минимальные проекторы — это абелевы проекторы алгебры R. В работе ([7]) вводится другое определение Z-минимальности, которое совпадает с нашим в случае $Z \subset \mathfrak{A}$, хотя, вообще говоря, оно отлично от него. Алгебру $\mathfrak{A}$ назовем Z-атомической, если всякий проектор из $\mathfrak{A}$ содержит Z-минимальный проектор.

Рассмотрим следующие условия:

а) пара $(\mathfrak{A}, R)$ промежуточно рефлексивна;

б) всякий ненулевой проектор из $\mathfrak{A}$ содержит ненулевой проектор из $\mathfrak{A} \cap C(R)$;

в) всякий Z-минимальный проектор из $\mathfrak{A}$ принадлежит $C(R)$;

г) для всякого проектора $p \in \mathfrak{A}$ сужение алгебры $\mathfrak{A}' \cap R$ на подпространство pH имеет разделяющий вектор.

Вообще говоря, эти условия не эквивалентны. Тем не менее, справедлива

Теорема 4. *Если $\mathfrak{A}$ Z — атомична или если R конечна и $Z \subset \mathfrak{A}$, то условия* а)—г) *эквивалентны.*

Следствие 4.1. *Если в условиях теоремы 4 $\mathfrak{A}$ коммутативна, то пара $(\mathfrak{A}, R)$ промежуточно рефлексивна тогда и только тогда, когда алгебра $\mathfrak{A}' \cap R$ имеет разделяющий вектор.*

Следствие 4.2. *Если в условиях теоремы 4 алгебра $\mathfrak{A}' \cap R$ коммутативна, то пара $(\mathfrak{A}, R)$ промежуточно рефлексивна.*

Следствие 4.3. *Если R конечна, $Z \subset \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}$ не имеет Z-минимальных проекторов, то пара $(\mathfrak{A}, R)$ промежуточно рефлексивна.*

Следствие 4.4. *Если R — конечная алгебра и $\mathfrak{A}$ — m.a.s.a. в R, то пара $(\mathfrak{A}, R)$ промежуточно рефлексивна.*

Пусть $\mathfrak{A}$ — m.a.s.a. в R. Следуя ([8]), будем называть $\mathfrak{A}$ **гладкой**, если существует точное нормальное ожидание R в $\mathfrak{A}$. Если $R = B(H)$, то гладкие m.a.s.a.— это атомические m.a.s.a. ([10]), если же R конечна, то всякая m.a.s.a. гладкая. Поэтому следующее предложение обобщает следствие 4.4 и одновременно доказанную в ([3]) и ([4]) теорему о рефлексивности слабозамкнутых алгебр, содержащих атомическую m.a.s.a.

Теорема 5. *Если $\mathfrak{A}$ — гладкая m.a.s.a. в R, то пара $(\mathfrak{A}, R)$ промежуточно рефлексивна.*

Авторы выражают благодарность М. А. Наймарку за внимание к работе.

Московский институт радиотехники,
электроники и автоматики

Поступило
7 II 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] D. E. Saroson, Pacific J. Math., **17**, 3, 511 (1966). [2] H. Radjavi, P. Rosenthal, Am. J. Math., **91**, 683 (1969). [3] C. Davis, H. Radjavi, P. Rosenthal, Canad. J. Math., **21**, 1178 (1969). [4] В. С. Шульман. Матем. сборн., **87** (129), № 2 (1971). [5] А. И. Логинов. В. С. Шульман, ДАН, **205**, № 2, 284 (1972). [6] A. Lambert, Pacif. J. Math., **39**, 3 (1971). [7] R. Kadison, Duke Math. J., **29**, 459 (1962). [8] J. Tomiyama, J. Funct. Anal., **10**, 4, 373 (1972). [9] J. A. Deddens, Indiana Univ. Math. J., **20**, 10 (1971). [10] R. Kadison, I. Singer, Am. Math. J., **81**, 383 (1959).