Доклады Академии наук СССР
1973. Том 212, № 4

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

О. В. ЛОКУЦИЕВСКИЙ

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ БИКОМПАКТОВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 2 II 1973)

Все рассматриваемые ниже топологические пространства предполагаются нормальными. Под размерностью пространства X понимается его размерность, определенная посредством покрытий ($\dim X$). Буквой ω всюду обозначается открытое конечное покрытие пространства. Классом топологических пространств будет называться такая их совокупность, которая содержит, во-первых, все конечные полиэдры и, во-вторых, вместе с каждым пространством как все замкнутые его подпространства, так и все гомеоморфные им. Ниже рассматриваются, в частности, следующие классы пространств:

$\mathfrak{X}_c{}^m$ — класс конечномерных метризуемых компактов,

$\mathfrak{X}^m$ — класс конечномерных метризуемых пространств,

$\mathfrak{X}_c$ — класс конечномерных бикомпактов.

П. С. Александров ([1], [2]) дал аксиоматическое определение размерности для класса $\mathfrak{X}_c{}^m$; для класса $\mathfrak{X}^m$ это было позже сделано Е. В. Щепиным ([8]).

Ниже предлагается аксиоматическое определение размерности применительно к классу $\mathfrak{X}_c$. Оно сводится к изменению лишь одной из первоначальных аксиом П. С. Александрова.

Пусть $\mathfrak{X}=\{X\}$ — класс пространств, и

$$Q=\{-1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}.$$

Следуя П. С. Александрову, будем называть размерностной функцией отображение

$$d\colon \mathfrak{X}\to Q,$$

удовлетворяющее следующим аксиомам:

A_1 (аксиома нормировки). *Если T^n — замкнутый n-мерный симплекс (причем $T^{-1}=\phi$), то $dT^n=n$; если X_1 и X_2 гомеоморфны, то $dX_1=dX_2$.*

A_2 (аксиома конечной суммы). *Если X_1 и X_2 замкнуты в X и $X=X_1\cup X_2$, то $dX=\max(dX_1, dX_2)$.*

A_3 (аксиома Брауера). *Для всякого $X\in\mathfrak{X}$ существует такое ω, что при любом ω-отображении $f_\omega\colon X\to Y$, $Y\in\mathfrak{X}$, имеет место неравенство $d(f_\omega X)\geqslant dX$.*

П. С. Александров доказал, что $dX\leqslant\dim X$ для любой размерностной функции $d\colon \mathfrak{X}_c{}^m\to Q$ и что $dX=\dim X$, если эта функция удовлетворяет следующему дополнительному условию:

A_4 (аксиома Пуанкаре). *Если X содержит более одной точки и $dX=n$, то существует такое замкнутое $B\subset X$, что $dB<n$ и $X\setminus B$ несвязно.*

П. С. Александров доказал также, что функция $\dim\colon \mathfrak{X}_c\to Q$ будучи (как и $\dim\colon \mathfrak{X}_c{}^m\to Q$) размерностной, не удовлетворяет аксиоме A_4. Об изменении именно этой аксиомы и говорилось выше.

Прежде всего сформулируем ее в несколько иной, более удобной для дальнейшего, форме. А именно, замкнутое $B\subset X$ назовем d-тонким в X, если $dB<dX$. Легко видеть, что аксиома A_4 эквивалентна следующей:

A_4' (аксиома Пуанкаре). *Если X содержит более одной точки, то найдутся непустые дизъюнктные замкнутые канонические $F_1, F_2 \subset X$, между которыми существует d-тонкая перегородка.*

Оказывается, что совпадение размерностной функции $d\colon \mathfrak{X}_c^m \to O$ с $\dim X$ обеспечивается более слабой, нежели A_4 (или A_4') аксиомой. Мы сформулируем эту аксиому применительно к размерностной функции $d\colon \mathfrak{X} \to Q$ не предполагая, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_c^m$. Для ее формулировки введем следующее

Предварительное определение. Множество $B_\omega \subset X$ называется (ω, d)-тонким в X, если существует такое ω-отображение * $f_\omega\colon B_\omega \to Y$, $Y \in \mathfrak{X}$, что $d(f_\omega B_\omega) < dX$.

Сформулируем теперь аксиому

A_4^* (ослабленная аксиома Пуанкаре). *Если X содержит более одной точки, то найдутся непустые дизъюнктные замкнутые канонические $F_1, F_2 \subset X$, между которыми при любом ω существует (ω, d)-тонкая перегородка.*

Ясно, что A_4^* является следствием A_4', а следовательно, и A_4.

Имеет место

Теорема. *Если все элементы класса $\mathfrak{X} = \{X\}$ суть бикомпакты, то функция* $\dim\colon \mathfrak{X} \to Q$ *является единственной размерностной функцией, удовлетворяющей аксиоме A_4^*.*

Следствие 1. *Функция* $\dim\colon \mathfrak{X}_c \to Q$ *есть единственная размерностная функция, удовлетворяющая аксиоме A_4^*.*

Из сформулированной выше теоремы (но не из следствия) 1) вытекает также

Следствие 2. *Функция* $\dim\colon \mathfrak{X}_c^m \to Q$ *есть единственная размерностная функция, удовлетворяющая аксиоме A_4^*.*

Утверждение теоремы вытекает из последующих трех лемм.

Лемма 1. *Функция* $\dim\colon \mathfrak{X} \to Q$ *есть размерностная функция, удовлетворяющая аксиоме A_4^*.*

Доказательство. Аксиома A_1 выполнена очевидным образом. Аксиомы A_2 и A_3 вытекают соответственно из теорем П. С. Александрова о размерности конечной суммы бикомпактов ([3]) и об ω-отображениях ([4]). Для проверки аксиомы A_4^* обратимся к рассмотренному в ([7]) размерностному инварианту $\operatorname{Ind}^* X$. Так как он совпадает с $\dim X$, то достаточно установить, что этой аксиоме удовлетворяет функция

$$\operatorname{Ind}^*\colon \mathfrak{X} \to Q.$$

Но если $\operatorname{Ind}^* X = n$, то в силу самого определения этого инварианта любые дизъюнктные замкнутые $F_1, F_2 \subset X$ при любом ω могут быть отделены замкнутой перегородкой B_ω, для которой существует такое ω-отображение $f_\omega\colon B_\omega \to Y$, $Y \in \mathfrak{X}$, что $\operatorname{Ind}^*(f_\omega B_\omega) < n$. Но и тогда и $\dim(f_\omega B_\omega) < n$. В то же время, если бикомпакт B_ω может быть ω-отображен на бикомпакт размерности $< n$, то, как известно (и легко доказывается), он может быть (при том же самом ω) ω-отображен и на полиэдр P размерности $< n$. А так как $P \in \mathfrak{X}$ и $\operatorname{Ind}^* P < n$, то B_ω оказывается $(\omega, \operatorname{Ind}^*)$-тонким в X. Лемма доказана.

Лемма 2 (П. С. Александров). *Пусть* $d\colon \mathfrak{X} \to Q$ *есть размерностная функция. Тогда* $dX \leqslant \dim X$.

Доказательство. Пусть $\dim X = n$. В силу цитированной уже теоремы П. С. Александрова об ω-отображениях, при любом ω существует ω-отображение $f_\omega\colon X \to P^n$, где P^n есть n-мерный полиэдр. Из A_1 и A_2 следует, что $dP^n = n$. А так как $f_\omega X \subseteq P^n$, то $P^n = P^n \cup f_\omega X$, и в силу той же аксиомы A_2 $d(f_\omega X) \leqslant n$. Поэтому, согласно A_3, $dX \leqslant n$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $d\colon \mathfrak{X} \to Q$ *есть размерностная функция, удовлетворяющая аксиоме A_4^*. Тогда* $\dim X \leqslant dX$.

---

* Под ω можно понимать как покрытие всего пространства X, так и покрытие его замкнутого подпространства B_ω.

Для доказательства этой леммы привлечем введенное П. С. Александровым в [5] понятие континуума (V). Напомним, что $X_0 \in \mathfrak{X}_c$ называется континуумом (V), если для любых непустых дизъюнктных открытых $G_1, G_2 \subset X_0$ существует такое $\omega = \omega(G_1, G_2)$, что, каковы бы ни были замкнутая перегородка $B_\omega \subset X_0$ между ними и ее ω-отображение

$$f_\omega \colon B_\omega \to Y, \quad Y \in \mathfrak{X}_c,$$

имеет место неравенство

$$\dim (f_\omega B_\omega) \geqslant \dim X_0 - 1.$$

Основная теорема о континуумах (V) состоит в том, что n-мерный бикомпакт X содержит n-мерный континуум (V). Эта теорема была впервые доказана для $\mathfrak{X}_c^m$ П. С. Александровым [5] и позже для $\mathfrak{X}_c$ В. И. Кузьминовым [6].

Доказательство леммы 3 проведем по индукции. Пусть сначала $dX = -1$. Тогда $X = \phi$ (иначе X содержит нульмерный симплекс, и $dX \geqslant 0$ в силу A_1 и A_2). Следовательно, $\dim X = -1$. Предположим, что утверждение уже доказано для всех тех $Y \in \mathfrak{X}$, для которых $dY < m$, и рассмотрим такой $X \in \mathfrak{X}$, что $dX = m$, $\dim X = n$. Нам надлежит установить неравенство $n \leqslant m$. Для этой цели рассмотрим такой континуум (V) $X_0 \subset X$, что $\dim X_0 = n$. Из A_2 следует, что $m = dX = \max (dX, dX_0) \geqslant dX_0$, т. е. что $dX_0 \leqslant m$. В силу A_4^* существуют такие непустые дизъюнктные замкнутые канонические $F_1, F_2 \subset X_0$, которые при любом ω могут быть отделены (ω, d)-тонкой в X_0 перегородкой B_ω. Последнее означает существование такого ω-отображения

$$f_\omega \colon B_\omega \to Y, \quad Y \in \mathfrak{X},$$

что

$$d(f_\omega B_\omega) < dX_0 \leqslant m.$$

Но тогда в силу индукционного предположения и

$$\dim (f_\omega B_\omega) < m. \tag{1}$$

В то же время B_ω является, конечно, перегородкой и между множествами $G_1 = \langle F_1 \rangle$ и $G_2 = \langle F_2 \rangle$. А так как X_0 есть континуум (V), то при некотором $\omega = \omega(G_1, G_2)$ должно быть

$$\dim (f_\omega B_\omega) \geqslant \dim X_0 - 1 = (n-1). \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что $n - 1 < m$ и, значит, $n \leqslant m$. Лемма доказана.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
14 I 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. S. Alexandroff, Math. Ann., 106 (1932). [2] П. С. Александров, Тр. Международн. симпозиума по топологии и ее применениям в Херцег-Нови (Югославия), август 1968, Белград, 1969. [3] П. С. Александров, Сообщ. Груз. фил. АН СССР, 2, 1941. [4] P. S. Alexandroff, Proc. Roy. Soc., 189 (1947). [5] P. S. Alexandroff, Monatsh. Math., 61, 1 (1957). [6] В. И. Кузьминов, ДАН, 139, № 1 (1961). [7] О. В. Локуциевский, ДАН, 179, № 2 (1968). [8] Е. Щепин, ДАН, 206, № 1 (1972).