Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 1

УДК 513.882 МАТЕМАТИКА

И. В. БОЙКОВ

ПРИНЦИП КОМПАКТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ В ВОЗМУЩЕННОМ МЕТОДЕ ГАЛЕРКИНА

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 14 IV 1973)

В ([1]) предложена теория приближенных методов, основанная на принципе компактной аппроксимации (п.к.а.). Ниже п.к.а. распространяется на более широкий класс уравнений. Приводится теорема о приближенном решении сингулярных интегродифференциальных уравнений (с.и.д.у.).

1°. Линейные уравнения. Даны B-пространства X, Y, их подпространства X_n, Y_n и операторы Q_n, P_n, проектирующие X и Y на X_n и Y_n соответственно.

Последовательность линейных операторов (п.л.о.) $K_n\in[X_n\to Y_n]$ *, к.а. оператор $K\in[X\to Y]$ на X_n, если ([1]):

а) $\|Kx-K_nQ_nx\|\to 0$ при $n\to\infty$ для любого $x\in X$; $Q_nx\to x$;

б) множество $Kx_n-K_nx_n$ компактно для любой последовательности $x_n\in X_n$, $\|x_n\|=1$.

Имеются уравнения: точное

$$Kx\equiv x+Hx=y$$

и последовательность приближенных

$$K_nx_n\equiv x_n+H_nx_n=y_n.$$

Теорема 1. *Пусть п.л.о. Q_nH — к.а. оператор H на X, а п.л.о. H_n — компактная аппроксимация последовательности линейных операторов Q_nH на X_n.*

Тогда, если уравнение $Kx=y$ разрешимо при любой правой части, то при достаточно больших n уравнения $K_nx_n=y_n$ разрешимы при любой правой части и справедлива оценка

$$\rho(X^*,\ X_n^*)\leqslant A_1[\|H_n-Q_nH\|\ \|Q_nx^*\|+\|(I-Q_n)x^*\|],$$

где X^* и X_n^* — множества решений уравнений $Kx=y$ и $K_nx_n=y_n$, I — единичный оператор.

Обозначим через $\bar{K}$ оператор, отображающий фактор-пространство X/X_0 на X (X_0 — пространство нулей оператора K).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:* а) *для любого $x_n\in X_n$*

$$\|K_nx_n-P_nKx_n\|\leqslant\varepsilon_1(n)\|x_n\|;$$

б) *для любого $x_n\in X_n$ существует $\tilde{y}_n\in Y_n$ такой, что*

$$\|Kx_n-\tilde{y}_n\|\leqslant\varepsilon_2(n)\|x_n\|,\qquad \|P_nKx_n-\tilde{y}_n\|\leqslant\varepsilon_2(n)\|x_n\|;$$

в) *если x_n^0 — решение уравнения $Kx=y_n$, $K\in[X\to Y]$, то существует такое $x_n\in X_n$, что*

$$\|x_n^0-x_n\|\leqslant\varepsilon_3(n)\|x_n^0\|.$$

---

* $[X\to Y]$ означает пространство линейных операторов, отображающих X в Y.

Тогда, если уравнение $Kx=y$ разрешимо при любой правой части, то при n таких, что

$$q=2[\varepsilon_1(n)(1+\varepsilon_3(n))+\varepsilon_3(n)\|PK\|]\|\overline{K}^{-1}\|<1,$$

уравнение $K_nx_n=y_n$, $K_n\in[X_n\to Y_n]$, разрешимо при любой правой части и справедлива оценка

$$\rho(X^*, X_n^*)\leqslant 8\|\overline{K}^{-1}\|^2(1+\varepsilon_3(n))[\varepsilon_1(n)+2\varepsilon_2(n)]\|y_n\|+2\|\overline{K}^{-1}\|\|y-y_n\|.$$

2°. Проблема собственных значений. Рассмотрим в комплексном банаховом пространстве X уравнение $x=\lambda_0Hx$, $H\in[X\to X]$, и последовательность приближенных уравнений $x_n=\lambda_{kn}H_nx_n$, $H_n\in[X_n\to X_n]$. Здесь λ_0 и λ_{kn} соответственно собственные значения первого и второго уравнений.

Возмущенный метод Галеркина в проблеме собственных значений изучен в (2), а метод к.а.— в (1).

Теорема 3. *Пусть $|\lambda_0-\lambda_{kn}|\to 0$, λ_0, λ_{kn}, $k=1,\ldots,m$, имеют ранги l_0, l_k.*

Тогда справедливы оценки *

$$|\lambda_0-\lambda_{kn}|\leqslant A_2[\|H-Q_nH\|+\|Q_nH-H_n\|]^{1/l},\quad \rho(x_k^{(v)}, X_0^{(i)})\leqslant A_3(|\lambda_0-\lambda_{kn}|^{i-v+1}+$$
$$+\|H-Q_nH\|+\|Q_nH-H_n\|),$$

где $v\leqslant i\leqslant l_0$, $l=\min\,(l_0, l_1+l_2+\ldots+l_m)$,

$$x_k^{(v)}\in X_k^{(v)}=\{x_n\in X_n\colon\ (I-\lambda_{kn}H_n)^v x_n=0\},\quad X_0^{(i)}=\{x_0\in X\colon\ (I-\lambda_0H)^i x_0=0\}.$$

Теорема 4. *Пусть H и H_n — правильные операторы, $|\lambda_0-\lambda_{kn}|\to 0$ при $n\to\infty$. Тогда*

$$|\lambda_0-\lambda_{kn}|\leqslant|\lambda_{kn}|(\varepsilon_1(n)+\varepsilon_2(n))/(1-\varepsilon_2(n)).$$

3°. Нелинейные уравнения. Пусть даны уравнения: точное $Kx=0$, где K — нелинейный оператор из X в X, и последовательность приближенных $K_nx_n=0$, где K_n — нелинейные операторы из X_n в X_n.

Теорема 5. *Пусть оператор K дифференцируем по Гато в X, а оператор K_n в X_n, уравнение $Kx=0$, имеет решение x^*,*

$$\|x^*-Q_nx^*\|\leqslant\varepsilon_1(n),\quad \varepsilon_1(n)\to 0,$$

и оператор $K'(x^*)$ имеет ограниченный правый обратный оператор $R(x^*)$ с нормой B_0. Пусть выполнены условия:

1) $\|Kx^*-K_nQ_nx^*\|\leqslant\varepsilon_2(n)$, $\varepsilon_2(n)\to 0$;

2) *п.л.о. $Q_nK'(x^*)$ к.а. оператор $K'(x^*)$ на X;*

3) *п.л.о. $K_n'(Q_nx^*)$ к.а. п.л.о. $Q_nK'(x^*)$ на X_n;*

4) *в сфере $S\{x;\ \|x-x^*\|\leqslant\varepsilon_1(n)+2B_0\varepsilon_2(n)/(1-q)\}$, $q<1$; $\|K_n'(x_1)-K_n'(x_2)\|\leqslant q/(2B_0)$, $x_1, x_2\in X_n$.*

Тогда при достаточно больших n уравнение $K_nx_n=0$ имеет решение x_n^*, для которого справедлива оценка $\|x^*-x_n^*\|\to 0$. Если x^* и x_n^* лежат в области значений оператора $R(x^*)$, то

$$\|x^*-x_n^*\|\leqslant A_4\|Kx_n^*-K_nx_n^*\|.$$

Замечание. Если $K\in[X\to Y]$ и $K_n\in[X_n\to Y_n]$, то вместо условий 2) и 3) следует положить:

2′) для каждого $x_n\in X_n$

$$\|P_nK'(Q_nx^*)x_n-K_n'(Q_nx^*)x_n\|\leqslant\varepsilon_3(n)\|x_n\|;$$

---

* Ранги l_0 и l_k можно заменить степенями старших делителей, соответствующих λ_0 и λ_{kn}.

3′) если x^0 — решение уравнения $K'(Q_n x^*)x=y_n$, $y_n\in Y_n$, то существует такое $x_n\in X_n$, что $\|x^0-x_n\|\leqslant\varepsilon_4(n)\|x^0\|$, $\varepsilon_3(n)$, $\varepsilon_4(n)\to 0$ при $n\to\infty$.

4°. Приближенное решение нелинейных с.и.д.у. Рассмотрим с.и.д.у.

$$Kx\equiv a(t,x(t),\ldots,x^{(m)}(t))+ \\ +(\pi i)^{-1}\int_L h(t,\tau,x(\tau),\ldots,x^{(m)}(\tau))(\tau-t)^{-1}d\tau=f(t) \quad (1)$$

при условиях

$$\int_L x(t)t^{-k-1}dt=0,\quad k=0,1,\ldots,m-1, \quad (2)$$

где L — единичная окружность с центром в начале координат. Будем считать, что $f(t)\in H_\alpha$, $a'_{u_i}(t,u_0,\ldots,u_m)\in H_{\alpha,1,\ldots,1}$, $h''_{u_i}(t,\tau,u_0,\ldots,u_m)\in \in H_{\alpha,\alpha,1,\ldots,1}$, $i=0,\ldots,m$.

Приближенное решение задачи (1), (2) ищется в виде полинома

$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k t^{k+m}+\sum_{k=-n}^{-1}\alpha_k t^k,$$

коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которого определяются из системы уравнений

$$\tilde{K}\tilde{x}\equiv P\Big\{a(s,\tilde{x}(s),\ldots,\tilde{x}^{(m)}(s))+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[P_\sigma[[h(s,\sigma,\tilde{x}(\sigma),\ldots,\tilde{x}^{(m)}(\sigma))]-$$

$$-i[[h(s,s,\tilde{x}(\sigma),\ldots,\tilde{x}^{(m)}(\sigma))-h(s,s,\tilde{x}(s),\ldots,\tilde{x}^{(m)}(s))]\times$$

$$\times\operatorname{ctg}((\sigma-s)/2)]]]-i\sum_{k=0}^{2n}{}'\Big[[h(s,s_k,\tilde{x}(s_k),\ldots,\tilde{x}^{(m)}(s_k))-$$

$$-h(s,s,\tilde{x}(s_k),\ldots,\tilde{x}^{(m)}(s_k))]\operatorname{ctg}\frac{s_k-s}{2}\psi_k(\sigma)\Big]d\sigma\Big\}=P[f(s)], \quad (3)$$

где P — оператор проектирования на множество интерполяционных полиномов по узлам $s_k=2k\pi/(2n+1)$, $k=0,\ldots,2n$, $a(s)=a(e^{is})$, $\tilde{x}^{(j)}(s)=\tilde{x}^{(j)}(e^{is})$, $j=0,\ldots,m$, $\sum_k{}'\varphi_{kj}$ означает суммирование по $k\neq j$, $\psi_k(s)$ — фундаментальные тригонометрические полиномы степени n по узлам s_k.

Введем следующие пространства функций: $X=H_\beta{}^m$ — пространство функций, удовлетворяющих условию (2) и имеющих производную m порядка, входящую в класс Гёльдера H_β, с нормой

$$\|x\|=M^{(m)}(x)+H^{(m)}(x;\beta)=\sum_{k=0}^{m}\max_{t\in L}|x^{(k)}(t)|+ \\ +\sup_{t_2\neq t_1}|x^{(m)}(t_2)-x^{(m)}(t_1)|/|t_2-t_1|^\beta;$$

Y — пространство функций, удовлетворяющих условию Гёльдера H_β с нормой

$$\|y\|=M^{(0)}(y)+H^{(0)}(y);$$

$\tilde{X}\subset X$ — пространство функций вида $\tilde{x}(t)$; $\tilde{Y}\subset Y$ — пространство полиномов степени не выше n.

Обоснование метода проводится при $\beta<\alpha/2$. Операторы K и $\tilde{K}$ имеют производные Фреше K' и $\tilde{K}'$ в пространствах X и $\tilde{X}$, причем справедливо неравенство

$$\|K'(x_1)-K'(x_2)\|<A_5\|x_1-x_2\|.$$

Воспользовавшись неравенством М. Рисса ([4]), можно показать, что $\|\tilde{K}'(\tilde{x}_1)-\tilde{K}'(\tilde{x}_2)\|\leqslant A_6 n^\beta \ln^2 n\|\tilde{x}_1-\tilde{x}_2\|$. Пусть $x^*\in H_\alpha$ — решение задачи (1), (2) и пусть существует ограниченный правый обратный оператор $R(x^*)=[K'(x^*)]_r^{-1}$ с нормой B_0. При n таких, что $q_1=A_7/n^{\alpha-\beta}<1$, оператор $K'(\tilde{x}^0)$, $\tilde{x}^0=T_n x^*$, имеет ограниченный правый обратный $R(\tilde{x}^0)$ с нормой $\|R(\tilde{x}^0)\|\leqslant B_0/(1-q_1)$. Здесь T_n — оператор проектирования на полиномы наилучшего приближения степени n в равномерной метрике. Воспользовавшись идеей ([5]) сведения с.и.у. к эквивалентным краевым задачам, результатами п. 3^0 и неравенством М. Рисса, можно показать, что при $q_2=\max\{q_1, A_8 \ln^2 n/n^{\alpha-\beta}\}<1$ оператор $\tilde{K}'(\tilde{x}^0)$ имеет линейный обратный с нормой $\|[\tilde{K}'(\tilde{x}^0)]^{-1}\|\leqslant A_9 \ln n$.

Теорема 6. *Пусть краевая задача* (1), (2) *имеет в некоторой сфере S единственное решение x^*, существует ограниченный правый обратный оператор $[K'(x^*)]_r^{-1}$.*

Тогда при n таких, что $q=A_{10}\ln^5 n/n^{\alpha-2\beta}<1$, уравнение (3) *имеет такое решение $\tilde{x}^*$, что $\|x^*-\tilde{x}^*\|\leqslant A_{11}\ln^2 n/n^{\alpha-\beta}$.*

Автор выражает искреннюю благодарность проф. Б. М. Гагаеву за внимание к работе.

Пензенский политехнический институт

Поступило 1 VIII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Г. М. Вайникко*, Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений, Тарту, 1970. [2] *Г. М. Вайникко*, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 7, № 5, 977 (1967). [3] *М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко* и др., Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969. [4] *M. Riesz*, Jahrsber, Deutsch, Math. Ver., B. 29 (1914). [5] *В. В. Иванов*, Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений, Киев, 1968.