Доклады Академии наук СССР
1974. Том 215, № 1

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

А. Л. БУХГЕЙМ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 2 VII 1973)

1. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int\limits_{\Omega} K(\xi,\zeta)q(\xi)\,d\xi=f(\zeta),\quad \zeta\in\mathfrak{M},\tag{1}$$

здесь Ω — открытое множество в R^n, $\mathfrak{M}$ — некоторое многообразие размерности $m\geqslant n$, $K(\xi,\zeta)$ — функция (вообще говоря обобщенная), заданная на $\Omega\times\mathfrak{M}$.

В работе при некоторых достаточно общих условиях на $K(\xi,\zeta)$ и $\mathfrak{M}$ предлагается алгоритм усреднения, сводящий уравнение (1) к уравнению

$$\bar{K}q\equiv\int\limits_{\Omega}\bar{K}(\xi,x)q(\xi)\,d\xi=\bar{f}(x),\quad x\in\Omega,\tag{2}$$

которое в ряде случаев исследовать легче, чем исходное уравнение (1). Часто оператор $\bar{K}$ можно разбить на два оператора:

$$\bar{K}=\bar{K}_0+\bar{K}_1,$$

где K_0 имеет в соответствующих функциональных пространствах ограниченный обратный оператор $\bar{K}_0^{-1}$, и свести тем самым исходную задачу (1) к решению уравнения второго рода

$$q+\bar{K}_0^{-1}\bar{K}_1q=\bar{K}_0^{-1}\bar{f}.$$

П. 2 посвящен описанию этого алгоритма.

2. Для $x\in\Omega$ и числа $p\in R^1$ положим $\mathfrak{M}_{x,p}=\{\zeta\in\mathfrak{M}\,|\,K(x,\zeta)=p\}$. Если $K(\xi,\zeta)\in C^2$ по ξ и

$$|\operatorname{grad}_x K(x,\zeta)|\geqslant\delta>0\qquad \forall x\in\Omega,\quad \forall\zeta\in\mathfrak{M}_{x,p},\tag{3}$$

то уравнение

$$K(\xi,\zeta)=p,\quad \zeta\in\mathfrak{M}_{x,p}$$

определяет (вообще говоря локально) ориентированную поверхность уровня p, проходящую через точку x. Для простоты изложения в дальнейшем считаем, что

$$|\operatorname{grad}_x K(x,\zeta)|=1\qquad \forall x\in\Omega,\ \forall\zeta\in\mathfrak{M}_{x,p}.$$

(В силу (3) это условие не ограничивает общности.)

Пусть S — единичная сфера в R^n. Предположим, что существует отображение $\varkappa_{x,p}$: $S\to\mathfrak{M}_{x,p}$, удовлетворяющее условию

$$\operatorname{grad}_\xi K(\xi,\varkappa_{x,p}(\nu))\,|_{\xi=x}=\nu\qquad \forall\nu\in S.$$

Положим в уравнении (1) $\zeta=\varkappa_{x,p}(\nu)$. Осредняя обе части уравнения (1) по всем $\nu\in S$ и меняя порядок интегрирования, приходим к уравнению (2), где

$$\tilde{K}(\xi, x) = \int\limits_{|\nu|=1} K(\xi, \varkappa_{x,p}(\nu))\, d\omega_\nu, \quad \tilde{f}(x) = \int\limits_{|\nu|=1} f(\varkappa_{x,p}(\nu))\, d\omega_\nu;$$

здесь $d\omega_\nu$ — элемент сферы S.

Ядро $K(\xi, \zeta)$ вида

$$K(\xi, \zeta) = \sum_{r=-1}^{l} \rho_r(\xi, \zeta) \delta^{(r)}(\Gamma(\xi, \zeta)), \quad l \leqslant n-2,$$

где $\delta(\Gamma)$ — функция Дирака, сосредоточенная на поверхности $\Gamma=0$ ($\delta^{(-1)}(\Gamma)$ — функция Хевисайда), а $\rho_r(\xi, \zeta)$ — достаточно гладкие весовые функции, тоже укладывается в изложенную схему, если положить $p=\infty$. В этом случае роль поверхностей уровня $p=\infty$ играют поверхности $\Gamma(\xi, \zeta)=0$, $\zeta \in \mathfrak{M}_{x,\infty}$. Уравнение (1) с ядром $K(\xi, \zeta)=\delta(\Gamma(\xi, \zeta))$ изучено в работе ([1]).

3. Известно (см. ([2])), что исследование вопроса единственности широкого класса обратных задач (вообще говоря нелинейных) сводится к проблеме единственности решения линейных интегральных уравнений типа (1). Ниже мы приводим два примера обратных задач, интегральные уравнения для которых изучались по схеме, изложенной в п.п. 1 и 2.

а) Пусть $u(x, x^0, t)$, x, $x^0 \in R^3$, $t>0$,— решение следующей задачи Коши:

$$u_{tt} = \Delta u - q(x) u + \delta(x - x^0, t), \; u|_{t<0} \equiv 0;$$

здесь Δ — оператор Лапласа по x, δ — функция Дирака и $q(x) \in C_0^4(Q)$, $Q = \{x \in R^3 \mid 2|x| < d\}$.

Для фиксированного момента времени $T > 2d$ рассмотрим систему функционалов l_{x^0} от решения u;

$$l_{x^0}[u] \equiv u(x^0, x^0, T) = f(x^0), \quad x^0 \in R^3 \setminus Q.$$

З а д а ч а. По функции $f(x^0)$ восстановить коэффициент $q(x)$.

Т е о р е м а 1. *Если* $q \in C_0^4(Q)$ *и* $d < \varepsilon$, $\varepsilon = \varepsilon(T, \|q\|_{C^4})$, *то коэффициент* $q(x)$ *однозначно восстанавливается по функции* $f(x^0)$, $x^0 \in R^3 \setminus Q$.

З а м е ч а н и е. Функцию $f(x^0)$ достаточно знать в кольце $T + d > 2|x^0| > T - d$.

б) Пусть функция $u(x, T)$ удовлетворяет условиям:

$$u_t = \Delta u + \varphi(t) q(x), \quad q \in C_0(Q), \quad \varphi(t) \in C[0, T],$$
$$u(x, 0) = 0,$$
$$l_{x^0}[u] \equiv u(x^0, T) = f(x^0), \quad x^0 \in R^3 \setminus Q.$$

Здесь $\varphi(t)$ — заданная функция, Q и T определены в подпункте а).

З а д а ч а. По функции $f(x^0)$, $x^0 \in R^3 \setminus Q$, найти функцию $q(x)$.

Т е о р е м а 2. *Функция* $q \in C_0(Q)$ *определяется по функции* $f(x^0)$, $x^0 \in R^3 \setminus Q$, *однозначно.*

З а м е ч а н и е. Функцию $f(x^0)$ достаточно знать в сколь угодно малом шаре вне Q.

Другие постановки обратных задач, близкие к постановкам а) или б), изучались в работах ([3–6]).

Автор выражает благодарность чл.-корр. АН СССР М. М. Лаврентьеву за обсуждение работы и полезные советы.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
26 VI 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *М. М. Лаврентьев, А. Л. Бухгейм*, ДАН, т. 210, № 3, 523 (1973). [2] *В. Г. Романов*, ДАН, т. 204, № 5, 1075 (1972). [3] *Ю. М. Березанский*, Тр. Московск. матем. общ., т. 7, 3 (1958). [4] *М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, В. Г. Васильев*, Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений, «Наука», 1969. [5] *В. Г. Романов*, Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа, «Наука», 1969. [6] *А. И. Прилепко*, Сборн. Применение функциональных методов к краевым задачам математической физики, Новосибирск, 1972, стр. 199.